「解答例」

選抜区分	平成 31 年度　一般選抜（前期日程） 経済学部　（科目名：数学）

問題 1

(1) $n=1$ のとき, $a_1=S_1$ である. このとき, 与式より

$$a_1 = 4\times 1^2 - a_1$$

よって, $a_1=2$ である. $\cdots$（答）
また, $S_2=a_1+a_2=2+a_2$ であるから, 与式より

$$a_2 = 4\times 2^2 - S_2 = 16-(2+a_2)$$

よって, $a_2=7$ である. $\cdots$（答）

(2) $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ なので, 与式より

$$a_{n+1} = 4(n+1)^2 - S_{n+1} = 4(n+1)^2 - S_n - a_{n+1}$$

与式から $S_n=4n^2-a_n$ であるから, これに代入して

$$a_{n+1} = 4(n+1)^2 - (4n^2-a_n) - a_{n+1}$$

よって, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+4n+2$ を得る. $\cdots$（答）

(3) (2) より

$$\begin{cases} a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1}+4(n+1)+2 & \cdots(a) \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n+4n+2 & \cdots(b) \end{cases}$$

式を辺々引き $(a)-(b)$ を考えて,

$$a_{n+2}-a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)+4$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ なので, $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+4$ を得る. また, (1) より $a_1=2$, $a_2=7$ だから, $b_1=a_2-a_1=7-2=5$ である.

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n+4$$

を変形して,

$$b_{n+1}-8 = \frac{1}{2}(b_n-8)$$

数列 $\{b_n-8\}$ は初項 $b_1-8=5-8=-3$ 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-8 = (-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって, $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=8-\dfrac{3}{2^{n-1}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ である. $\cdots$（答）

(4) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列は $\{b_n\}$ であるから, $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{n=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{n-1}\left(8 - \frac{3}{2^{k-1}}\right) \\ &= 2 + 8(n-1) - 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 8n - 12 + \frac{3}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

また, $n=1$ のとき (1) より $a_1 = 2 = 8\times 1 - 12 + \frac{3}{2^{1-2}}$ でこの式を満たす.

よって, $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 8n - 12 + \dfrac{3}{2^{n-2}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ である. $\cdots$（答）

(5) n は正の整数なので, 与式と (4) より

$$\begin{aligned} S_n > 1000 &\iff 4n^2 - a_n > 1000 \\ &\iff 4n^2 - \left(8n - 12 + \frac{3}{2^{n-2}}\right) > 1000 \\ &\iff 4\left\{(n-1)^2 + 2 - \frac{3}{2^n}\right\} > 1000 \\ &\iff (n-1)^2 + 2 - \frac{3}{2^n} > 250 \\ &\iff (n-1)^2 > 250 - \left(2 - \frac{3}{2^n}\right) \\ &\iff (n-1)^2 \geqq 256 \qquad \left((n-1)^2 \text{ は平方数, } \frac{1}{2} \leqq 2 - \frac{3}{2^n} < 2 \text{ であるから}\right) \\ &\iff n \geqq 17 \end{aligned}$$

よって, 求める最小の n は $n = 17$ である. $\cdots$（答）

問題 2

(1) $n = 1$ のとき, 方程式 $f(x) = 0$ は 2 次方程式で,

$$x^2 + 2x + \frac{m}{3} = 0$$

が異なる 2 つの実数解をもつ条件を考えればよいので, 判別式が

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot \frac{m}{3} > 0$$

を満たすことが条件である. よって, $m < 3$ となる. これを満たす正の整数は,
$m = 1, 2$ である. $\cdots$（答）

(2) $n = 1$ のとき,

$$\int_0^m f(x)\,dx = \int_0^m \left(x^2 + 2x + \frac{m}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{m}{3}x\right]_0^m = \frac{m^3}{3} + \frac{4m^2}{3}$$

であるから, 与えられた不等式は

$$\begin{aligned} &\int_0^m f(x)\,dx \leqq \frac{5m}{3} \\ \iff\ & \frac{m^3}{3} + \frac{4m^2}{3} \leqq \frac{5m}{3} \\ \iff\ & m^3 + 4m^2 - 5m \leqq 0 \\ \iff\ & m(m+5)(m-1) \leqq 0 \\ \iff\ & (m+5)(m-1) \leqq 0 \quad (m > 0 \text{ より}) \\ \iff\ & -5 \leqq m \leqq 1 \end{aligned}$$

これを満たす正の整数は $m=1$ である．$\cdots$（答）

(3) 与えられた条件より

$$\begin{aligned} & m^2+n^2+2mn-m-n-6=0 \\ \iff\quad & (m+n)^2-(m+n)-6=0 \\ \iff\quad & (m+n+2)(m+n-3)=0 \end{aligned}$$

$m+n$ は正の整数なので，$m+n=3$ である．これを満たす正の整数の組は $(m,n)=(1,2),(2,1)$ である．

$(m,n)=(2,1)$ のとき，$f(x)$ は 2 次関数で

$$f(x)=x^2+2x+\frac{2}{3}=(x+1)^2-\frac{1}{3}$$

$x\geqq -2$ より，関数 $f(x)$ の最小値は $f(-1)=-\frac{1}{3}$ である．

$(m,n)=(1,2)$ のとき，$f(x)$ は 4 次関数で

$$f(x)=x^4+2x^2+\frac{1}{3}=(x^2+1)^2-\frac{2}{3}$$

$t=x^2$ とおく．$x\geqq -2$ より $t\geqq 0$ で，t の 2 次関数

$$(t+1)^2-\frac{2}{3}$$

と表せるので，$t=0$ つまり $x=0$ で最小値 $f(0)=\frac{1}{3}$ をとる．

よって　$(m,n)=(2,1)$ のとき，　最小値 $f(-1)=-\frac{1}{3}$　$\cdots$（答）

コメント： 問題 2 (3) については，題意を読み違えていると答案が多く．「条件を満たす m,n を求め、それぞれの場合に $x\geqq -2$ における $f(x)$ の最小値 $f(-1)=-\frac{1}{3}$ と $f(0)=\frac{1}{3}$ を求めている答案」と「$x\geqq -2$ におけるそれぞれの最小値 $f(-1)=-\frac{1}{3}$ と $f(0)=\frac{1}{3}$ を求め，題意の最小値を $f(-1)=-\frac{1}{3}$ としている答案」のいずれも正解とした．

(4) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ が $x=2$ で接する条件は，

$$\begin{cases} f'(2)=g'(2) & \cdots(a) \\ f(2)=g(2) & \cdots(b) \end{cases}$$

$f'(x)=2nx^{2n-1}+2nx^{n-1}=2nx^{n-1}(x^n+1)$ と $g'(x)=20n$ より

$$\begin{aligned} (a)\quad \iff\quad & 2n\cdot 2^{n-1}(2^n+1)=20n \\ \iff\quad & 2^n(2^n+1)=20 \\ \iff\quad & (2^n)^2+2^n-20=0 \\ \iff\quad & (2^n+5)(2^n-4)=0 \\ \iff\quad & 2^n=-5,4 \end{aligned}$$

$2^n>0$ より $2^n=4$ であり，n は正の整数だから，$n=2$ である．このとき，(b) より

$$2^4+2\cdot 2^2+\frac{m}{3}=20\cdot 2\cdot 2$$

よって，$m=168$ を得る．求める組は，$(m,n)=(168,2)$ $\cdots$（答）

問題3

(1) 三角形ABCは，$\angle$Aが直角であるから，外接円の中心Oは，辺BCの中点である．ODは，$\angle$AOCの二等分線であり，$\angle \mathrm{AOC}=2\alpha$ なので，$\angle \mathrm{ABC}=\alpha$ である．

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}\\ &= 4\cos\alpha\\ &= 4\cdot\tfrac{3}{4}\\ &= 3\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AB}=3$ である．$\cdots$（答）

(2) 三角形OCDについて $\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=2$, $\angle\mathrm{DOC}=\alpha$ なので，余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{CD}^2 &= \mathrm{OC}^2+\mathrm{OD}^2-2\cdot\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}\cdot\cos\alpha\\ &= 4+4-2\cdot2\cdot2\cdot\tfrac{3}{4}\\ &= 2\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$ である．$\cdots$（答）
また，三角形BCDについて $\angle$BDCは直角であるから，三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2\\ &= 16-2\\ &= 14\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{BD}=\sqrt{14}$ である．$\cdots$（答）

(3) 三角形BCDとCEDにおいて，$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{CDE}$（直角），外接円Oの中心角と円周角の関係から $\angle\mathrm{DBC}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{DOC}=\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOD}=\angle\mathrm{DCE}$ であるから，
三角形BCD $\backsim$ 三角形 CEDである．よって，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{CD}:\mathrm{DE}$ であるから，(2)の結果より

$$\begin{aligned}\mathrm{DE} &= \frac{\mathrm{CD}^2}{\mathrm{BD}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{14}}\\ &= \frac{\sqrt{14}}{7}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{DE}=\frac{\sqrt{14}}{7}$ である．$\cdots$（答）

(4) 三角形AEFは $\angle$EAFが直角であるから，EFは求める外接円の直径である．
外接円Oの中心角と円周角の関係から $\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOC}=\alpha=\angle\mathrm{DOC}$ であるので，FBとDOは平行で，$\mathrm{BO}=\mathrm{OC}$ であるから，三角形FBCについて中点連結定理より，$\mathrm{DF}=\mathrm{CD}$ である．(2)(3)の結果より $\mathrm{CD}=\sqrt{2}$, $\mathrm{DE}=\frac{\sqrt{14}}{7}$ であり，三角形DEFは $\angle$EDFが直角であるから，三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{EF}^2 &= \mathrm{DE}^2+\mathrm{DF}^2\\ &= \mathrm{DE}^2+\mathrm{CD}^2\\ &= \tfrac{2}{7}+2\\ &= \tfrac{16}{7}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{EF}=\frac{4}{\sqrt{7}}$ であるので，$r=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ である．$\cdots$（答）

問題4

(1) 確率 $P(A), P(B), P(C)$ は

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cdots (\text{答})$$

(2) $n=0$ となるのは,「事象 C が 4 回の場合」であるから

$$p(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \cdots (\text{答})$$

$n=1$ となるのは,「事象 A が 1 回, 事象 C が 3 回の場合」であるから

$$p(1) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{4}{81} \cdots (\text{答})$$

$n=2$ となるのは,「事象 A が 2 回, 事象 C が 2 回の場合」または「事象 B が 1 回, 事象 C が 3 回の場合」であるから

$$p(2) = ({}_4C_2 + {}_4C_1) \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{6+4}{3^4} = \frac{10}{81} \cdots (\text{答})$$

$n=3$ となるのは,「事象 A が 3 回, 事象 C が 1 回の場合」または「事象 A, B が 1 回ずつ, 事象 C が 2 回の場合」であるから

$$p(3) = \left({}_4C_3 + \frac{4!}{1!1!2!}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{4+12}{3^4} = \frac{16}{81} \cdots (\text{答})$$

(3) 4 回試行するときコマが点 $T(1)$ に少なくとも一度コマが置かれるのは,「はじめに事象 A が起こる場合」または「はじめに事象 C 次に事象 A が起こる場合」または「はじめに事象 C が 2 回, 次に事象 A が起こる場合」または「はじめに事象 C が 3 回, 次に事象 A が起こる場合」である. よって, 求める確率は

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{27+9+3+1}{3^4} = \frac{40}{81} \cdots (\text{答})$$

(4) 4 回の試行後にコマが点 $T(6)$ にある場合は, $n=6$ で「事象 A が 2 回, 事象 B が 2 回の場合」または「事象 B が 3 回, 事象 C が 1 回の場合」の ${}_4C_2 + {}_4C_3 = 6+4 = 10$ 通り. そのうち, 点 $T(3)$ を通過するのは,「はじめに事象 A, B が 1 回ずつで点 $T(3)$ に到達し, 更に事象 A, B が 1 回ずつで点 $T(6)$ に到達する場合」の $2+2=4$ 通りである. これらは同じ確率 $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ で起こる. よって, 求める確率は

$$\frac{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4}{10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{2}{5} \cdots (\text{答})$$

「出題の意図」

選抜区分	平成３１年度　一般選抜（前期日程） 経済学部　（科目名：数学）
(1) 出題の意図・ねらい	本学の数学入試では、基本的な問題が出題されています。いわゆる難問は出題されません。基本的な定理や公式の理解力と論理的な思考力を試すのがねらいです。単なる暗記力や計算力よりも、問題の分析能力と的確な判断力や工夫する力を見るのがねらいです。また、出題の範囲に十分注意してください。
(2) 答案の特徴と傾向	問題１ (1)は数列の基礎問題です。(2)は条件式を利用して、数列の和を分解して代入すれば、第 n+1 項と第 n 項の関係式を容易に求めることができます。(1) (2)は全体によくできていました。(3)は階差を求めて等比数列であることがわかれば解けます。等比数列の一般項を求める問題ですが、数列の初項の計算を間違えた答案が多くみられました。(4)の問題は(3)の解答に基づき、等比数列の和の計算をします。別解として、(2)の解答に基づき等比数列の形式と書き直せば解けます。(5)の不等式をまず両辺に割って整理して簡素化します。そのうえ指数関数の特徴がわければ解けます。(3) (4) (5)の正答率が低かったです。全体的にしっかり問題を把握して丁寧に計算することを心がけてください。 問題２ 関数と整数問題の融合問題です。(1)は２次関数の判別式から、m が正の整数であるという条件を満たすものを答えられるかを問いました。(2)は積分と不等式を定数 m が正の整数であるという条件のもとで解けばよいという問題でした。(1) (2)ともに m が正の整数であるという条件を見落としている答案が多かったです。(3)では m と n に関する等式を因数分解して(m, n)が正の整数であるという条件から（m, n）を特定化する整数問題を処理したのちに、関数 f(x)の最小値を求めるという２段階を踏めばよいという問題でした。初めの段階でつまずいている人が多かったです。できた人とそうでない人で差がつく問題でした。(4)では関数の接点の問題なので、接点 x=2 において２つの導関数が f’（2）＝g’（2）を満たし、かつ f(2)＝g(2)であるという条件を解けばよいという問題でした。全体的に出来が悪かったです。この条件式はわかっていた人もいましたが、指数方程式が解けていない人、指数計算を間違っている人が多かったです。

	問題３ 全体に出来は良くありませんでした。三角比、角の二等分線、中心角と円周角の関係、相似な三角形などの性質をきちんと理解していれば、解けたのではないかと思います。(1)三角比の性質を利用する基礎問題です。(2)は余弦定理や三平方の定理を利用する問題です。(3)は相似な三角形の性質を利用すれば解けますが、正答率は高くありませんでした。(4)は、CD=FD になることに気がつけば解けます。正答率はごくわずかでした。 問題４ 確率を求める問題ですが、計算そのものは難しくありません。ただ、問題文の趣旨を理解して、正確に計算しないといけません。そのためか、高得点が多かった一方で点数の低い答案も多く、出来不出来のばらつきが大きい印象でした。(1)と(2)は基礎的な計算です。(3)は正確に場合を尽くせば求まるのですが。計算ミスの多い答案が多く見られました。(4)は条件付き確率の乗法定理やベイズの定理の問題です。ここでも問題文をよく読んで正確に計算することが求められます。