

数理マルクス経済学：講義ノート

第1稿：2015年3月16日

田中淳平*

北九州市立大学経済学部

概要

本稿は、前稿『古典派およびマルクスの経済学入門』を大幅に書き直して、数理マルクス経済学の学部中級レベルの講義ノートの形に仕上げたものである。

Key Word：「労働価値」「労働搾取」「マルクスの基本定理」「均等利潤率」「生産価格」「単純商品生産経済」「富・階級・搾取の対応原理」「資本蓄積」「拡大再生産」「新古典派経済学」「一般均衡理論」「近代経済学」

<目次>

はじめに

第1章 労働価値 (p8)

第2章 マルクスの基本定理 (p25)

第3章 均等利潤率と生産価格 (p42)

第4章 単純商品生産経済 (p54)

第5章 富・階級・搾取の対応原理 (p68)

第6章 拡大再生産 (p88)

* E-mail: j-tanaka@kitakyu-u.ac.jp

本稿の作成過程で議論の相手になってくれた畔津憲司、魏芳、山下剛の各氏に感謝する。いうまでもなく本稿に含まれる誤りは筆者の責任に帰する。

はじめに

<本稿の執筆動機>

本稿は、マルクス経済学に関心のある学生を対象に、「マルクスの基本定理」や「富・階級・搾取の対応原理」といった数理マルクス経済学の主要命題を丁寧に解説した講義ノートである。近年、我が国では格差や貧困といった社会問題に対する関心の高まりを背景にマルクスの経済学が再び注目を浴びており、一般読者を対象としたマルクス経済学関連の書籍が数多く出版されるようになったが、それら啓蒙書のレベルを越えてマルクス経済学の理論的骨格を分かりやすく、しかし厳密に解説した本は少ない（もしくは、過去に出版されていたとしても現時点で入手しづらい）。これは、主流派経済学（＝古い言い回しだと「近代経済学」）の領域において様々な啓蒙書から大学生を対象とした教科書、大学院レベルの専門書までがバラエティ豊かに出版されているという状況とは対照的であり、こうした現状は啓蒙書レベルを越えてマルクス経済学の理論的骨格をきちんと理解したいと望んでいる読者にとって大きな障害になっているように思われる。本稿はこうした現状を少しでも改善する目的で作成されたもので、レベル的には大学の学部中級レベルのテキストに相当する内容となっている。ただ、著者はこの分野の専門家ではないので、本稿には様々な誤りが含まれている可能性がある。もし明らかな誤りを見つけられた場合、著者にメールしていただくと幸いです。

<数理マルクス経済学とは？>

そもそもマルクス経済学とは、その当時の最先端経済理論であった古典派経済学（特にリカードの経済学）を継承し、それを深化させることで資本主義経済の背後に潜む労働搾取の構造を明らかにしようとした経済学である。リカードは財の「(投下)労働価値」、すなわちその財を1単位生産するのに直接・間接に投下された労働時間がその財の価格を規定する（＝いわゆる「労働価値説」）と考えたが、マルクスはそのような労働価値説が成立する経済では、労働者が働いた時間（例えば10時間）がその賃金所得で購入できる財の労働価値（例えば6時間）よりも大きくなること、言い換えるとその差の4時間分の「剰余労働」が利潤という形で資本家の懐に入るという事実を発見し、この事実を資本主義経済を批判するための基礎に据えた。

数理マルクス経済学とは、マルクスが提起したこうした問題を数学的手法を用いてより厳密に考察することを目的としたマルクス経済学の一つの潮流を指し、その主要な課題は、労働搾取を「ある個人が1時間の労働を供給することで獲得した財の労働価値が1未満の状況」と定義した上で、誰がどのような条件の下で搾取者（ないし被搾取者）となるのかを解明することにある。そして、1950年代後半から1960年代前半にかけて、置塩信雄は「労働価値説が成立しない（＝価格が労働価値に比例しない）経済であっても、各部門の

利潤が正である限り、必ず労働者は搾取される」という、いわゆる「マルクスの基本定理」を証明し、この分野における堅固な土台を築きあげた。さらに 1980 年代前半にジョン・ローマー (John Roemer) は、ミクロ的基礎付けに乏しかったそれまでの数理マルクス経済学の理論的枠組みを一般均衡論的に鍛え直した上で、「富・階級・搾取の対応原理」、すなわち各個人の合理的選択の結果として、所有する資本財の量が大きい (小さい) 個人ほど雇用する (雇用される) 立場となって搾取する (搾取される) ことを明らかにした。

このように数理マルクス経済学の目的はどのような原因で労働搾取が引き起こされるのかを明らかにすることにあるが、これはこの経済学の主要な関心が経済の「実証的側面 (= 現象解明的側面)」よりもむしろ「規範的側面」にあることを示している。経済の実証的側面の分析とは、例えば経済現象としての賃金や利潤の大きさがどのようなメカニズムで決まるのかを分析することを意味し、この種の議論はマルクスが手本とした古典派経済学でも行われている。それに対してマルクスの経済学は、古典派経済学の分析枠組みを踏襲しつつ、労働価値概念に立脚した労働搾取という新たな指標を導入することで、そのようなメカニズムで決定された賃金や利潤の大きさ (すなわち所得分配のあり方) が果たして公正 (fair) と言えるのか、という問題に焦点を当てるところに最大の特徴がある。この意味で、主流派経済学の立場から見ると、数理マルクス経済学とは労働搾取という公正さに関する特定の価値基準を採用することで、実現した所得分配の規範的性質を考察する厚生経済学の一つと理解するのが最も適当だと思われる¹。

もっとも、マルクス流の労働搾取という指標が分配の公正性の尺度としてどの程度普遍的な説得力を持っているのかという点に関して、現時点では必ずしも満足に行く説明が与えられていないように思えるので、万人がこうした視点から経済システムの性能を規範的に評価することに賛成するとは限らないかもしれないが、少なくとも数理マルクス経済学は主流派経済学では学べないユニークな視点から経済のあり方を考察する一つのきっかけを与えてくれるし、またその分析の方法は主流派経済学と共通するものがあるので、数理マルクス経済学を学ぶことで主流派経済学に対する理解も深まる可能性は十分にある。

マルクス経済学の権威は 1990 年代に社会主義体制が崩壊したことで失墜したが、これは必ずしもマルクス経済学的なスタンスで経済のあり方を評価する意義が完全に失われてしまったことを意味するわけではない。むしろ、急速な市場経済化を背景に貧困や格差の問題が広がっている現在こそ、主流派経済学をいったん相対化して、それとは異なる視点か

¹ 上述したように、古典派経済学において労働価値は財の価格を説明するための概念として位置付けられていた。しかし 19 世紀後半のいわゆる「限界革命」による新古典派経済学の誕生によって価格を説明する主観価値的かつ需給均衡論的な接近法が確立・浸透するにつれ、価格の決定要因としての労働価値概念は見捨てられていく結果となる。

マルクスの経済学は限界革命以前に構築された学問体系なので、その体系内において労働価値という概念は、価格の決定要因という実証的な意味合いと、分配の公正さを測定する規範的な意味合いの両方を兼ね備えた概念として用いられているが、前者の意味での説得力がほとんど失われてしまった現在、マルクス経済学を労働価値概念を後者の意味で用いた厚生経済学の一つと解釈するのが最もすっきりすると思われるのである。

ら経済のあり方を考え直してみる機会を持つことの意義は高まっていると言えるかもしれない。この講義ノートが、そのように主流派経済学に批判的に向き合いたいと考える人達に少しでも役立てば、それ以上の喜びはない。

<この講義ノートの内容について>

この講義ノートは基本的に Roemer (1986) を参考にして作成したものである。Roemer (1986) は 100 ページにも満たないコンパクトな本であるが、一般均衡論的に基礎付けされた n 部門レオンチェフモデルを用いて数理マルクス経済学における主要命題が明快にサーベイされている。ただ、その証明が線形代数的手法でエレガントになされているため、非専門家にとっては内容が抽象的で、モデルの具体的な構造を把握したり定理の直感的な意味合いを理解するのが容易ではない。そこで、Roemer (1986) の内容をシンプルな 2 部門モデルの形に書き直して非専門家にも近づきやすくしたのがこの講義ノートである。ただ、本稿の作成にあたっては Roemer (1986) 以外にも様々な文献に目を通し、Roemer (1986) よりも説明が優れていると感じたトピックスや、そもそも Roemer (1986) では取り上げられていないトピックスに関しては、それらの文献を参考にした上で全体を構成し直したので、この講義ノートの内容と Roemer (1986) のそれは完全に 1 対 1 に対応しているわけではない。各章をまとめる際に特に参考にした文献を挙げておくと以下のとおりである。

第 1 章 : Roemer (1986) の第 1 節、三土 (1984) の第 1、2 章

第 2 章 : 三土 (1985) の第 3 章、置塩 (1976) の第 1 章、Roemer (1986) の第 3 節

第 3 章 : Roemer (1986) の第 3、4 節、置塩・鶴田・米田 (1988) の第 6 章

第 4 章 : Roemer (1986) の第 5 節

第 5 章 : Roemer (1986) の第 6、7 節

第 6 章 : 置塩 (1976) の第 2 章、佐藤 (2011) の第 6 章

なお、本稿は基本的に Roemer (1986) に依拠して作成されたこともあって、内容の 8 割方は労働搾取論に該当するトピックスの解説に充てられ、例えば置塩 (1976) などで労働搾取論と同等かそれ以上の紙幅を割いて説明されている資本蓄積論 (= 拡大再生産経路の長期的・短期的な性質に関する議論) については第 6 章で簡単に紹介するにとどめている。これは、労働搾取論こそ主流派経済学には見られないマルクス経済学固有の理論だと考えたからである。言い換えると、資本蓄積論については新古典派やポストケインズ派といったマルクス経済学以外の流派でも活発に議論されており、しかもそれらの分析レベルはマルクス派のそれをはるかに凌駕しているように思えるので、マルクス経済学と銘打ったこの講義ノートでわざわざ資本蓄積論を包括的に取り扱う必要はないと感じたからである。新古典派的な経済成長理論に興味のある人は例えばジョーンズ (2011) などを、ポス

トケインズ派の循環と成長の理論に興味のある人は（やや上級者向けだが）浅田（1997）の序章などを参照せよ²。

<数理マルクス経済学と関連のある参考文献の紹介>

最後に、数理マルクス経済学と関連する主な参考文献をリストアップし、簡単に紹介しておく。

・松尾匡『図解雑学 マルクス経済学』ナツメ社、2010年

マルクス経済学の体系の中で、今なお古びていないと著者が考える部分を整理してそのエッセンスを簡潔に解説した啓蒙書。本書の中ほどで「マルクスの基本定理」が数式を用いずに説明されている。数理マルクス経済学関連の文献の中では最も入門的な一冊。

・稲葉振一郎・松尾匡・吉原直毅『マルクスの使いみち』太田出版、2006年

新古典派経済学的（＝一般均衡論的）手法を用いて数理マルクス経済学を飛躍的に前進させたジョン・ローマーの業績を一般読者向けに紹介した啓蒙書。なぜ新古典派的手法に依拠すべきなのか、それによってどのような分析が可能となるのか、が詳しく論じられている。対話形式で構成されていて一見読みやすそうに見えるが、内容はかなり難しい。

・三土修平『基礎経済学 マル経と近経の断絶に悩む人のために』日本評論社、1984年

一般均衡理論の個性的な入門書。産業連関分析から出発し、その枠組みを用いて「マルクスの基本定理」を説明した後、一般均衡理論が産業連関分析のエッセンスを包摂しながら全社会的な諸財の需給の釣り合いを定式化したモデルであることを分かりやすく説いている。同じ著者による『経済学史』（新世社）も古典派やマルクスの経済理論のポイントを手早くおさえるのに有用。ただし、現時点で両方とも絶版。

・置塩信雄『蓄積論（第二版）』筑摩書房、1976年

数理マルクス経済学のパイオニアによって書かれた、この分野における初級から中級レベルの優れた概説書。労資に分断された生産関係が必然的に生み出す搾取の構造や、資本家が搾取を通じて得た利潤をさらなる資本蓄積へと注ぎ込むことで可能となる拡大再生産経路の長期的・短期的性質などを、ところどころで数式を援用しながら周到に論じている。ただし、現時点で絶版。

・置塩信雄・鶴田満彦・米田康彦『経済学』大月書店

上述の『蓄積論（第二版）』の数式の量を減らし、いくつかのトピックスを新たに追加し

² ジョーンズ（宮川他訳）『マクロ経済学Ⅰ：長期成長編』東洋経済新報社、2011年
浅田統一朗『成長と循環のマクロ動学』日本経済評論社、1997年

た感じの入門的テキスト。

・佐藤良一『社会経済学への誘いー置塩経済学入門ー』、2011年（未出版原稿、著者のホームページからダウンロード可能：http://smiling.ws.hosei.ac.jp/wp/?page_id=153）

欧米の政治経済学の展開を視野に入れつつ、上述の『蓄積論（第二版）』で展開された題材をよりシンプルなモデルを用いて解説し直したリメイク版。『蓄積論（第二版）』よりも数学的ハードルがやや低く、本文が対話形式で構成されていることもあって読みやすい。置塩的な数理マルクス経済学の体系を学びたい人にとって貴重な入門的文献。

・大西広『マルクス経済学』慶應義塾大学出版会、2012年

マルクス主義的な経済理論をその歴史観（史的唯物論）との関係で解説・再構成することを試みた本。とくに著者が提唱する「マルクス派最適成長論」、すなわち資本主義経済の長期的趨勢を新古典派的な最適成長モデルを用いて定式化した理論を詳しく紹介している点が類書とは異なっている。

・高増明・松井暁（編）『アナリティカル・マルキシズム』ナカニシヤ出版、1999年

1970年代後半頃からコーエン、エルスター、ローマーといった欧米の新しいマルクス主義者達によって形成された「アナリティカル・マルキシズム」、すなわち論理学、数学、主流派経済学、ゲーム理論などの成果を導入してマルクス主義を再構築するという学問的潮流の全体像と各論を紹介した本。ただし、現時点で絶版。

・置塩信雄『資本制経済の基礎理論（増訂版）』創文社、1978年（初版は1965年）

・森嶋通夫（高須賀義博訳）『マルクスの経済学：価値と成長の二重の理論』東洋経済新報社、1974年（→『森嶋通夫著作集』の第7巻）

・John Roemer『Value, Exploitation and Class』Harwood Academic Publishers, 1986

数理マルクス経済学の巨人達によって書かれた上級レベルのテキスト。取り上げられているトピックスに多少の違いはあるが、どの本も n 部門レオンチェフモデルを用いてこの分野の主要命題を厳密に論じている点で共通している。私見では、一般均衡論的に基礎付けられた分析枠組みに依拠して最新のトピックスまでカバーしているローマーの本が最も現代的と評価できるように思うが、反面、数学的叙述がエレガントで抽象的なので、それに抵抗を感じる人は他の2冊の方が性に合うかもしれない。ただし、置塩と森嶋の本は現時点で絶版で入手が困難。

・吉原直毅『労働搾取の厚生理論序説』一橋大学経済研究叢書、2008年

労働搾取論の現時点での到達点を体系的に論じた最上級の専門書。「マルクスの基本定理」や「富・階級・搾取の対応原理」といった主要命題がレオンチェフモデルよりも一般

的なモデルで成立するのか、それらが成立するためには労働搾取概念をどのように定義しなければならないか、などが緻密に論じられている。

第 1 章 労働価値

- 1. 1 基本モデル
- 1. 2 一般的な 2 部門モデル
- 1. 3 労働価値
- 1. 4 結合生産モデルにおける労働価値

<第 1 章の目的>

シンプルな 2 部門モデルを用いて、線形経済モデルの基本構造を学ぶ。また、労働価値という概念を導入し、その導出の仕方を説明する。

1. 1 基本モデル

目的：基本モデルを提示し、総生産と純生産の関係を考察する

<モデルの基本設定>

- ・財 1 (=資本財) と財 2 (=消費財) が生産される 2 部門モデルを想定
- ・資本財の 1 単位の生産には、資本財を a_1 単位、労働を l_1 単位投入する必要がある
消費財の 1 単位の生産には、資本財を a_2 単位、労働を l_2 単位投入する必要がある
(当然、これらの投入係数はすべて正)
- ・資本財は、生産過程に投入すると消滅する (=固定資本ではなく原材料のイメージ)
- ・期首における資本財の賦存量は K 単位、労働の賦存量は L 単位

表 1.1 基本モデルの投入係数

	財 1 (資本財)	財 2 (消費財)
財 1 (資本財)	a_1	a_2
財 2 (消費財)	0	0
労働	l_1	l_2

・表 1.1 を縦に読むと、財 i ($i=1,2$) を 1 単位生産するのに必要な各財および労働の量を意味し、表 1.1 を横に読むと、第 i 部門 ($i=1,2$) の 1 単位の生産に財 i ($i=1,2$) もしくは労働がどれだけ需要されるかを意味する

<実行可能性条件>

・財 1 (資本財) の総生産量を x_1 、財 2 (消費財) の総生産量を x_2 と表記すると、 (x_1, x_2) は以下の条件を満たす必要がある

$$(1.1) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq K \quad \left(x_2 \leq -\frac{a_1}{a_2} x_1 + \frac{K}{a_2} \right)$$

$$(1.2) \quad l_1 x_1 + l_2 x_2 \leq L \quad \left(x_2 \leq -\frac{l_1}{l_2} x_1 + \frac{L}{l_2} \right)$$

(図 1.1 : 実行可能性条件 3 パターン)

・マルクス経済学では図 1.1.a のように (1.1) が等号で成立し (1.2) が不等号で成立するような場合 (=資本財は余らないが、労働は余るケース) を想定することが多い

<純生産可能条件>

・財 i の純生産量 = 財 i の総生産量 - 財 i の中間投入量

(例) 小麦のみが生産される 1 部門経済において、ある期間の期首に 20 トンの小麦を資本財として投入することで期末に 100 トンの小麦を生産した場合、総生産量は 100 トン、純生産量は 80 トン

→ 純生産量とは、総生産量から期首に投入した分 (→ この分は期首の資本財ストックを維持するために次期に持ち越される) を差し引いた残り、すなわち単純再生産が可能になる条件を担保した上でその期に享受できる成果のこと。なお、資本財ストックを一定に保つために総生産の一部を次期に持ち越すことを「補填投資」という

・財 1 (資本財) の純生産量を f_1 、財 2 (消費財) の純生産量を f_2 と表記すると…

$$(1.3) \quad f_1 = x_1 - (a_1 x_1 + a_2 x_2), \quad f_2 = x_2$$

・純生産量が正でないと、単純再生産すら不可能となり、経済を維持できなくなる

→ 両部門の純生産量が正となるために投入係数が満たすべき条件は？

$$(1.4) \quad f_1 > 0 \text{ かつ } f_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > a_1 x_1 + a_2 x_2 \text{ かつ } x_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a_1) x_1 > a_2 x_2 \text{ かつ } x_2 > 0$$

(→ これより、 $1 - a_1 > 0$ でなければならない)

$$\Leftrightarrow 0 < x_2 < \frac{1 - a_1}{a_2} x_1$$

(図 1.2 : 両部門の純生産が正となるような (x_1, x_2) の領域)

命題 1.1 (基本モデルにおける純生産可能条件)

両部門の純生産量が正となるような (x_1, x_2) が存在するために投入係数が満たすべき条件は以下のとおり。

$$(1.5) \quad 1 - a_1 > 0$$

(1.5) が満たされている限り、両部門の純生産量が正となるような総生産量の組み合わせ

が必ず存在する。以後、常にこの条件が満たされている状況を想定する

- ・以上より、実行可能で、かつ純生産可能な (x_1, x_2) の領域を図示すると…

(図 1.3 : 実行可能性条件と純生産可能条件の両方を満たす総生産量の領域)

<純生産量と総生産量の関係>

- ・各財の純生産量を 1 単位増やすために、各財の総生産量を何単位増やす必要があるか？

→ (1.3) を、各財の純生産量 (f_1, f_2) が与えられたときの各財の総生産量 (x_1, x_2) の連立方程式とみなし、それを解くと…

$$(1.6) \quad x_1 = \frac{f_1 + a_2 f_2}{1 - a_1}, \quad x_2 = f_2$$

- ・財 1 の純生産量 f_1 を 1 単位増やすために増やさなければならない各財の総生産量は

$$(1.7) \quad \frac{\partial x_1}{\partial f_1} = \frac{1}{1 - a_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial f_1} = 0$$

→ 財 1 の総生産量が 1 単位増えると純生産量が $1 - a_1$ 単位増えるので、逆に純生産量を 1 単位増やすには総生産量を $1/(1 - a_1)$ 単位増やす必要がある。他方、財 1 の生産に財 2 は必要ないので、財 1 の純生産量を 1 単位増やすのに必要な財 2 の総生産量の増加分は 0

問題 1.1

財 2 の純生産量 f_2 を 1 単位増やすには、各財の総生産量がどれだけ増えなければならないか？ 理由と共に答えよ。

<生産可能性集合>

基本モデルにおいて、純生産可能な各財の組み合わせは？

- ・資本財が稀少な場合、(1.6) を (1.1) に代入して整理すると…

$$(1.8) \quad \frac{a_1}{1 - a_1} f_1 + \left(\frac{a_1 a_2}{1 - a_1} + a_2 \right) f_2 \leq K$$

・ f_1 の係数 ($= a_1 / (1 - a_1)$) は、「財 1 の純生産量 f_1 を 1 単位増やすために必要な財 1 の賦存量 K の増加分」を意味する

→ なぜ財 1 の純生産量を 1 単位ふやすのに $a_1 / (1 - a_1)$ 単位の財 1 の増加が必要か？

→ (1.7) より、財 1 の純生産量を 1 単位増やすには、財 1 の総生産量を $1/(1 - a_1)$ 単位増やす必要がある (財 2 の総生産量を増やす必要はない)。財 1 の総生産量をそれだけ増やすには、期首の資本財 (財 1) が $a_1 / (1 - a_1)$ 単位、追加的に必要となる。

問題 1.2

f_2 の係数の意味を説明せよ

・ (1.8) を変形すると…

$$f_2 \leq - \frac{a_1}{a_1 a_2 + (1 - a_1) a_2} f_1 + \frac{1 - a_1}{a_1 a_2 + (1 - a_1) a_2} K$$

→ f_1 の係数 (の絶対値) : $\frac{a_1}{a_1 a_2 + (1 - a_1) a_2}$ は「財 1 の純生産量を 1 単位増やすために犠牲にしなければならない財 2 の純生産量」を意味し、「限界変形率」と呼ばれている。

(図 1.4 : 資本財が稀少な場合の生産可能性集合)

問題 1.3

労働が稀少な場合の生産可能性集合を導出し、各係数の意味を説明せよ。

1. 2 一般的な 2 部門モデル

目的 : 一般的な 2 部門モデルを提示し、総生産と純生産の関係を考察する

<モデルの基本設定>

- ・ 財 1 と財 2 の 2 種類の財が生産される
- ・ どちらの財も、資本財としても消費財としても利用できる
- ・ 財 1 の 1 単位の生産には、財 1 を a_{11} 単位、財 2 を a_{21} 単位、労働を l_1 単位投入
財 2 の 1 単位の生産には、財 1 を a_{12} 単位、財 2 を a_{22} 単位、労働を l_2 単位投入
(当然、これらの投入係数はすべて正)

∴ 一般に、係数 a_{ij} は、財 j を 1 単位生産するのに必要な財 i の量を意味する

表 1.2 一般的な 2 部門モデルの投入係数

	財 1	財 2
財 1	a_{11}	a_{12}
財 2	a_{21}	a_{22}
労働	l_1	l_2

- ・ 各財は、生産過程に投入すると消滅する (= 固定資本ではなく原材料のイメージ)
- ・ 期首における財 1 の賦存量は K_1 単位、財 2 の賦存量は K_2 単位、労働の賦存量は L 単位

<実行可能性条件>

財 1 の総生産量を x_1 、財 2 の総生産量を x_2 と表記すると、 (x_1, x_2) は以下の条件を満たす必要がある

$$(1.9) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq K_1 \quad \left(x_2 \leq -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{K_1}{a_{12}}\right)$$

$$(1.10) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq K_2 \quad \left(x_2 \leq -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{K_2}{a_{22}}\right)$$

$$(1.11) \quad l_1x_1 + l_2x_2 \leq L \quad \left(x_2 \leq -\frac{l_1}{l_2}x_1 + \frac{L}{l_2}\right)$$

(図 1.5 : 実行可能性条件の一例)

<純生産可能条件>

・財 1 の純生産量を f_1 、財 2 の純生産量を f_2 と表記すると…

$$(1.12) \quad f_1 = x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2), \quad f_2 = x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

・ $f_1 > 0$ かつ $f_2 > 0$ が成立するために投入係数が満たすべき条件は？

$$(1.13) \quad f_1 > 0 \text{ かつ } f_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \text{ かつ } x_2 > a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$\Leftrightarrow (1 - a_{11})x_1 > a_{12}x_2 \text{ かつ } (1 - a_{22})x_2 > a_{21}x_1$$

(\rightarrow これより、 $1 - a_{11} > 0$ かつ $1 - a_{22} > 0$ でなければならない)

$$\Leftrightarrow \frac{a_{21}}{1 - a_{22}} < \frac{x_2}{x_1} < \frac{1 - a_{11}}{a_{12}}$$

(\rightarrow これより、 $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ でなければならない)

(図 1.6 : 両部門の純生産が正となるような (x_1, x_2) の領域)

・ (1.13) より、以下を得る

命題 1.2 (一般的な 2 部門モデルにおける純生産可能条件)

両部門の純生産量が正となるような (x_1, x_2) が存在するために投入係数が満たすべき条件は以下のとおり。

$$(1.14) \quad 1 - a_{11} > 0, \quad 1 - a_{22} > 0, \quad (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$$

・モデルを行列で記述することで純生産可能条件の数学的構造がより明快になる。

(1.12) を (x_1, x_2) に関する連立方程式と見なし、それを行列表示すると…

$$(1.15) \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = (I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \left(I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right)$$

ここで、以下の定理が成立する³

ホーキンス=サイモンの定理

以下の 2 条件は同値である。

- (i) $f_1 > 0$ かつ $f_2 > 0$ に対して、(1.16) は非負解 (x_1, x_2) を持つ
- (ii) 行列 $I - A$ のすべての主座小行列式⁴が正である。

ここで、条件 (ii) は $1 - a_{11} > 0$, $1 - a_{22} > 0$, $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ を意味するので、確かに命題 1.2 が成立することを確認できる。

<純生産量と総生産量の関係>

・(1.15) より、各財の純生産量 (f_1, f_2) が与えられたとき、各財の総生産量は…

$$(1.16) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1 - a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$(\Delta \equiv \det(I - A) = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21})$$

(※ ここで、命題 1.2 の純生産可能条件が満たされる限り、 $\det(I - A) = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ が成立するので、行列 $(I - A)$ は可逆となる点に注意)

これより、各財の総生産量は…

$$(1.17) \quad x_1 = \frac{(1 - a_{22})f_1 + a_{12}f_2}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{a_{21}f_1 + (1 - a_{11})f_2}{\Delta}$$

したがって、各財の純生産量を 1 単位増やすために必要な各財の総生産量の増加分は…

$$(1.18) \quad \frac{\partial x_1}{\partial f_1} = \frac{1 - a_{22}}{\Delta}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial f_1} = \frac{a_{21}}{\Delta}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial f_2} = \frac{a_{12}}{\Delta}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial f_2} = \frac{1 - a_{11}}{\Delta}$$

<生産可能性集合>

・(労働と比較して) 各財の賦存量が稀少な場合、(1.17) を (1.9) と (1.10) に代入して

³ 証明は、例えば二階堂副包『現代経済学の数学的方法』岩波書店などを参照せよ。

⁴ 例えば、行列 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ の主座小行列式は、以下の 3 つである。

$$\det c_{11} (= c_{11}), \quad \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

整理すると…

$$(1.19) \quad \frac{a_{11}(1-a_{22})+a_{12}a_{21}}{\Delta} f_1 + \frac{a_{12}}{\Delta} f_2 \leq K_1$$

$$(1.20) \quad \frac{a_{21}}{\Delta} f_1 + \frac{a_{21}a_{12}+a_{22}(1-a_{11})}{\Delta} f_2 \leq K_2$$

・(1.19) の f_1 の係数は、「財 1 の純生産量 f_1 を 1 単位ふやすには、財 1 の期首賦存量 K_1 がどれだけ増えなければならないか」を意味している

→ なぜ、その値が $\frac{a_{11}(1-a_{22})+a_{12}a_{21}}{\Delta}$ なのか？

→ (1.18) より、財 1 の純生産量を 1 単位増やすには、財 1 の総生産量を $(1-a_{22})/\Delta$ 単位、財 2 の総生産量を a_{21}/Δ 単位増やす必要がある。財 1 の総生産量をそれだけ増やすには期首の財 1 の賦存量が $a_{11}(1-a_{22})/\Delta$ 単位、財 2 の総生産量をそれだけ増やすには期首の財 1 の賦存量が $a_{12}a_{21}/\Delta$ 単位、追加的に必要となるので、それを合わせると f_1 の係数と一致する。(他の係数の意味も同様に説明できる)

(図 1.7 : 各財が稀少な場合の生産可能性集合の一例)

問題 1.4

労働が稀少な場合の生産可能性集合を導出し、各係数の意味を説明せよ。

1. 3 労働価値

目的：労働価値という概念を定義し、その値を計算する。2通りの定義が提示されるが、どちらも同じ結果をもたらすことを明らかにする。

<労働価値の第 1 の定義>

- ・1.1 節で提示した基本モデル (=資本財と消費財の 2 部門モデル) を想定する
- ・労働価値の第 1 の定義は以下のとおり

労働価値の第 1 定義

財 i の労働価値とは、財 i を 1 単位生産するのに直接・間接に投下された労働量のこと。

・基本モデルにおいて、例えば財 1 の生産には l_1 単位の労働が直接的に投下されているだけでなく、 a_1 単位の財 1 の投入を通じて間接的にも労働が投下されている

(問い) どうすれば各財の労働価値を計算できるか？

(答え) 「価値方程式」を解くことで求められる

・財1の労働価値を λ_1 、財2の労働価値を λ_2 とおくと、価値方程式は以下のとおり

$$(1.21) \quad \lambda_1 = a_1 \lambda_1 + l_1, \quad \lambda_2 = a_2 \lambda_1 + l_2$$

第1式は、財1の労働価値 λ_1 は直接的に投下された労働量 l_1 （＝「生きた労働」）と間接的に投下された労働量 $a_1 \lambda_1$ （＝「死んだ労働」）の和で表わされることを意味している（第2式についても同様）

→ (1.21) を解くことで、各財の労働価値は…

$$(1.22) \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{1-a_1}, \quad \lambda_2 = l_2 + \frac{a_2}{1-a_1} l_1$$

（※ したがって各財の労働価値が正となるためには「純生産可能条件： $1-a_1 > 0$ 」が満たされなければならない）

・(1.22)の結果の直感的意味を考えてみると…

財1を1単位生産するには、労働を l_1 単位、財1を a_1 単位投下する必要がある

→ところが、投下する a_1 単位の財1を生産するには、労働を $a_1 l_1$ 単位、財1を $(a_1)^2$ 単位投下する必要がある

→ところが、投下する $(a_1)^2$ 単位の財1を生産するには、労働を $(a_1)^2 l_1$ 単位、財1を $(a_1)^3$ 単位投下する必要がある

→以後、この繰返し…

∴ 財1を1単位生産するためにトータルで投下した労働量 λ_1 は

$$\lambda_1 = l_1 + a_1 l_1 + (a_1)^2 l_1 + \dots = \frac{l_1}{1-a_1}$$

問題 1.5

同様の論法で、財2の労働価値 λ_2 を計算せよ。

問題 1.6

投入係数が表1.2で与えられる一般的な2部門モデルにおける各財の労働価値を、価値方程式を解くことで求めよ。

<労働価値の第2の定義>

・労働価値の第2の定義は以下のとおり

労働価値の第2定義

財 i の労働価値とは、財 i を1単位純生産するのに必要な労働量のこと。

・この定義に沿って財 1 の労働価値を求めると…

→ (1.6) より、財 1 を 1 単位純生産 (すなわち、 $(f_1, f_2) = (1, 0)$) するのに必要な各財の総生産量は、 $x_1 = 1/(1-a_1)$, $x_2 = 0$ となるので、その総生産量を実現するのに必要な労働量 λ_1 は、 $\lambda_1 = l_1 x_1 + l_2 x_2 = l_1/(1-a_1)$ となり、確かに第 1 定義の下での結果 (1.22) と一致する。

問題 1.7

同様の方法で財 2 の労働価値 λ_2 を計算し、それが (1.22) と一致することを確認せよ。

問題 1.8

投入係数が表 1.2 で与えられる一般的な 2 部門モデルについて、第 2 定義に基づく方法で各財の労働価値を求め、それが問題 1.6 の答えと一致することを確認せよ。

<2つの定義が同じ結果をもたらすことの証明>

・なぜ、一見異なるように見える 2 つの定義が同じ結果をもたらすのか？

→ 価値方程式 (1.21) を行列表示すると

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (l_1, l_2)$$

となり、右辺の第 1 項を左辺に移項すると以下のとおり。

$$(\lambda_1, \lambda_2) (I - A) = (l_1, l_2) \quad \left(I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

純生産可能条件 (1.5) が成立している下では $(I - A)$ は可逆なので、第 1 の定義に沿って労働価値ベクトルを求めると

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (l_1, l_2) (I - A)^{-1}$$

他方、第 2 の定義に沿って労働価値ベクトルを導出すると以下のとおり。基本モデルにおいて総生産量と純生産量の関係 (1.3) を行列で表わすと

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = (I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

となるので、 $(f_1, f_2) = (1, 0)$ を達成するのに必要な労働量 λ_1 は

$$\lambda_1 = (l_1, l_2) (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

同様に、 $(f_1, f_2) = (0, 1)$ を達成するのに必要な労働量 λ_2 は

$$\lambda_2 = (l_1, l_2) (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、労働価値ベクトル (λ_1, λ_2) は

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (l_1, l_2) (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (l_1, l_2) (I - A)^{-1}$$

以上より、2つの定義から導かれる労働価値が常に一致することが示された。 ■

1. 4 結合生産モデルにおける労働価値

目的：結合生産が存在する場合、前節の労働価値の定義の下でどのような問題が生じるか、それを克服する新たな労働価値の定義はどのようなものか、を考える。

<結合生産モデル>

- ・前節までの基本モデルでは、1つの生産工程から1種類の財が生産される
 (第1工程) 財1を a_1 、労働を l_1 投入することで、財1が1生産される
 (第2工程) 財1を a_2 、労働を l_2 投入することで、財2が1生産される
- ・結合生産モデルでは、1つの生産工程から「財の組み合わせ」が生産される
 (第1工程) 財1を a_1 、労働を l_1 投入して、財1を b_{11} 、財2を b_{21} 生産

$$\text{投入} \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{産出} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$$

(第2工程) 財1を a_2 、労働を l_2 投入して、財1を b_{12} 、財2を b_{22} 生産

$$\text{投入} \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{産出} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

b_{ij} : 第 j 工程を1単位 (=1時間) 稼働させたときに生み出される財 i の量

(※ 基本モデルは、 $b_{11} = b_{22} = 1$, $b_{21} = b_{12} = 0$ という特殊ケースに相当)

- ・結合生産モデルでは、財の数と工程の数が一致する必要はない

(例) 財が3種類、工程が2種類のケース

$$\text{第1工程: 投入} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ l_1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{産出} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} \quad \text{第2工程: 投入} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ l_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{産出} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}$$

<結合生産モデルの純生産量>

・第1工程を x_1 単位 (時間), 第2工程を x_2 単位 (時間) 稼働させると…

$$\text{第1工程: 投入} \begin{pmatrix} a_1 \\ l_1 \end{pmatrix} x_1 \rightarrow \text{産出} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} x_1, \quad \text{第2工程: 投入} \begin{pmatrix} a_2 \\ l_2 \end{pmatrix} x_2 \rightarrow \text{産出} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} x_2$$

・財1の純生産量を f_1 , 財2の純生産量を f_2 とおくと…

$$(1.23) \quad f_1 = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2) - (a_1x_1 + a_2x_2), \quad f_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2$$

この (1.23) を行列表記すると…

$$(1.24) \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = (B - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (B \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

→ 基本モデルとの違いは、単位行列 I が B へと変化している点

<結合生産モデルに標準的な労働価値を適用することの問題点>

・結合生産モデルに労働価値の標準的な定義を適用すると、例えば財1の労働価値 λ_1 は「財1を1単位純生産 (すなわち $(f_1, f_2) = (1, 0)$) するのに必要な労働量」を意味する

→ これを求めるには、 (f_1, f_2) が与えられたときの総生産量 (x_1, x_2) を知る必要がある

→ しかし…

① そもそも $(B - A)$ は一般に正方行列ですらない

② たとえ $(B - A)$ が正方行列であっても、それが可逆とは限らない

∴ 一般に結合生産モデルでは、 (f_1, f_2) が与えられても、 (x_1, x_2) は一意に確定しない

さらに、たとえ $(B - A)$ が正方行列かつ可逆であっても、以下のような問題が生じる

$$\text{(例)} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (l_1, l_2) = (1, 1) \text{ の場合}$$

この場合…

・第1工程を1単位稼働させると、財1を5単位、財2を0単位投入して、財1を6単位、財2を1単位生産するので、この工程での財1と財2の正味の生産量は共に1

・第2工程を1単位稼働させると、財1を2単位、財2を0単位投入して、財1を5単位、財2を2単位生産するので、この工程での財1 (財2) の正味生産量は3単位 (2単位)

∴ この経済は生産的であり、一見したかぎり問題ないように見える

→ しかし、各財の純生産量 (f_1, f_2) が与えられたとき、各財の総生産量 (x_1, x_2) は…

$$(1.25) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (B - A)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

これより、財 1 を 1 単位純生産するのに必要な各財の総生産量は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、財 1 の労働価値 λ_1 は以下のように負になってしまう！

$$\lambda_1 = l_1 x_1 + l_2 x_2 = -1$$

問題 1.9

同様に、財 2 の労働価値 λ_2 を求めよ。

- ・ 結合生産モデルでは、なぜ労働価値が負となりうるのか？

上の数値例を図解すると…

$$(1.26) \quad (B - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(\text{ここで、} (B - A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

∴ 非負の x_1 と x_2 でどのような $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ の一次結合を作っても、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を表現できない！

(図 1.8 : (1.26) のベクトル図)

- ・ 一方、生産技術が表 1.1 で規定される基本モデルでは…

$$(1.27) \quad (I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 - a_1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -a_2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

∴ この場合、ある非負の x_1 と x_2 で、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 - a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合として表現できるので、財 1 の労働価値は必ず正となる (財 2 の労働価値についても同様)

(図 1.9 : (1.27) のベクトル図)

問題 1.10

生産技術が表 1.2 で規定される一般的な 2 部門モデルにおいて、各財の労働価値が必ず正

となる理由を上述べた方法で説明せよ。

<森嶋型の労働価値の定義>

では、結合生産モデルにおいて労働価値をどのように定義すればよいか？

→ 標準的な定義は、以下の森嶋型の定義である

森嶋型の労働価値の定義

財 i の労働価値とは、財 i を少なくとも 1 単位純生産するのにかかる最小の労働量のこと。

→ 財 1 の労働価値を λ_1 とおくと、それは以下の最小化問題の解として定義される

$$\min_{x_1, x_2} \lambda_1 = l_1 x_1 + l_2 x_2 \quad \text{s.t.} \quad (B - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(※ 同じ次数の 2 つのベクトル a と b に対して $a \geq b$ が成立するとは、両ベクトルのすべての成分について $a_i \geq b_i$ が成立することを意味する)

(例) $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(l_1, l_2) = (1, 1)$ の場合

この場合、財 1 の労働価値 λ_1 は…

$$\min_{x_1, x_2} \lambda_1 = x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 + 3x_2 \geq 1, \quad x_1 + 2x_2 \geq 0$$

この問題を図示すると下の図 1.10 のようになるので、 λ_1 を最小にする (x_1^*, x_2^*) は $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1/3$ となり、対応する財 1 の労働価値は $\lambda_1^* = 1/3$ となる。

(図 1.10 : 森嶋型の定義に基づく財 1 の労働価値)

問題 1.11

上の例で財 2 の労働価値 λ_2 を求めよ。

・森嶋型の定義の問題点

上の最小化問題の解となる各工程の稼働時間 (x_1^*, x_2^*) が、分権的経済で実際に成立する稼働時間と一致するとは限らず、場合によっては、 (x_1^*, x_2^*) の下で一部の工程における利潤が負となる場合すらあり得ること

<第1章の問題の解答>

問題 1.1

$$\frac{\partial x_1}{\partial f_2} = \frac{a_2}{1-a_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial f_2} = 1$$

理由：財2の生産に財2は必要ないので、財2の純生産量を1単位増やすには、その総生産量が同じだけ増えればよい。他方、財2を1単位生産するには財1が a_2 単位必要であり、これだけの量の財1を確保するためには財1の総生産量を $a_2 \times 1/(1-a_1)$ 単位増やす必要がある。 ■

問題 1.2

f_2 の係数は、財2の純生産量 f_2 を1単位増やすために必要な財1の賦存量 K の増加分のこと。

→ なぜ財2の純生産量を1単位増やすのに $\left(\frac{a_1 a_2}{1-a_1} + a_2\right)$ 単位の財1の増加が必要か？

→ 問題1.1の答えより、財2の純生産量を1単位増やすには、財1の総生産量を $a_2/(1-a_1)$ 単位、財2の総生産量を1単位増やす必要がある。そして、各財の総生産量をそれぞれ増やすには、期首の資本財（財1）が $\frac{a_1 a_2}{1-a_1} + a_2$ 単位、追加的に必要となる。 ■

問題 1.3

(1.6) を (1.2) に代入して整理すると…

$$\frac{l_1}{1-a_1} f_1 + \left(\frac{a_2 l_1}{1-a_1} + l_2\right) f_2 \leq L$$

ここで、 f_1 の係数 $l_1/(1-a_1)$ は、財1の純生産量 f_1 を1単位増やすのに必要な労働賦存量 L の増加分のこと⁵。(1.7)より、財1の純生産量を1単位増やすには、財1の総生産量を $1/(1-a_1)$ 単位、財2の総生産量を0単位増やす必要があるので、各財の総生産量をそれぞれ増やすには、期首の労働量が $l_1/(1-a_1)$ 単位、追加的に必要となる（ f_2 の係数についても全く同様に議論できる）。

上式を変形すると

⁵ 実は、この値が1.3節で説明される「労働価値」に他ならない。（以下、個人的 memo）同様に考えると、資本財が稀少な場合の生産可能性フロンティア (1.9) における各係数はそれらの財の「資本財価値」になるはずであるが、第2章の2.3節で論じるように、各財の資本財価値はそれらの係数とは一致しない。これはなぜなのか？

$$f_2 \leq -\frac{l_1}{a_2 l_1 + (1-a_1)l_2} f_1 + \frac{1-a_1}{a_2 l_1 + (1-a_1)l_2} L$$

となる。 f_1 の係数（の絶対値） $\frac{l_1}{a_2 l_1 + (1-a_1)l_2}$ は労働が稀少な場合の限界変形率である。

最後に、生産可能性集合を図示すると以下のとおり。 ■

(図 1.A.1 : 労働が稀少な場合の生産可能性集合)

問題 1.4

(1.17) を (1.11) に代入して整理すると…

$$\frac{(1-a_{22})l_1 + a_{21}l_2}{\Delta} f_1 + \frac{a_{12}l_1 + (1-a_{11})l_2}{\Delta} f_2 \leq L$$

ここで、 f_1 の係数は「財 1 の純生産量 f_1 を 1 単位増やすために必要な労働賦存量 L の増加分」を意味している。(1.18) より、財 1 の純生産量を 1 単位増やすには、財 1 の総生産量を $(1-a_{22})/\Delta$ 単位、財 2 の総生産量を a_{21}/Δ 単位増やす必要がある。したがって、財 1 の総生産量をそれだけ増やすには、期首の労働賦存量が $[(1-a_{22})l_1 + a_{21}l_2]/\Delta$ だけ追加的に必要となる (f_2 の係数についても同様に説明できる)。 ■

問題 1.5

財 2 を 1 単位生産するには、労働を l_2 単位、財 1 を a_2 単位投下する必要がある

→ 投下する a_2 単位の財 1 を生産するには、労働を $a_2 l_1$ 単位、財 1 を $a_2 a_1$ 単位投下する必要がある

→ 投下する $a_2 a_1$ 単位の財 1 を生産するには、労働を $a_2 a_1 l_1$ 単位、財 1 を $a_2 (a_1)^2$ 単位投下する必要がある

→ 投下する $a_2 (a_1)^2$ 単位の財 1 を生産するには、労働を $a_2 (a_1)^2 l_1$ 単位、財 1 を $a_2 (a_1)^3$ 単位投下する必要がある

→ 以後、この繰返し…

∴ 財 2 を 1 単位生産するためにトータルで投下した労働量 λ_2 は

$$\lambda_2 = l_2 + a_2 l_1 [1 + a_1 + (a_1)^2 + (a_1)^3 + \dots] = l_2 + \frac{a_2}{1-a_1} l_1 \quad \blacksquare$$

問題 1.6

この場合、価値方程式は以下ようになる。

$$(1.a.1) \quad \lambda_1 = a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + l_1, \quad \lambda_2 = a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + l_2$$

これを直接 (λ_1, λ_2) に関して解くことで、各財の労働価値は以下ようになる。

$$\lambda_1 = \frac{(1-a_{22})l_1 + a_{21}l_2}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{a_{12}l_1 + (1-a_{11})l_2}{\Delta} \quad (\Delta \equiv (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}) \quad \blacksquare$$

なお、以上の導出を行列を用いてやり直すと、(1.a.1) は…

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (l_1, l_2)$$

右辺の第 1 項を左辺に移項すると

$$(\lambda_1, \lambda_2) (I - A) = (l_1, l_2) \quad \left(I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

純生産可能条件 (1.14) の下で、行列 $(I - A)$ は可逆となるので、各財の労働価値は

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \lambda_2) &= (l_1, l_2) (I - A)^{-1} \\ &= (l_1, l_2) \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1-a_{11} \end{pmatrix} \quad (\Delta \equiv (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}) \\ &= \left(\frac{(1-a_{22})l_1 + a_{21}l_2}{\Delta}, \frac{a_{12}l_1 + (1-a_{11})l_2}{\Delta} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

問題 1.7

(1.6) より、財 2 を 1 単位純生産 (すなわち、 $(f_1, f_2) = (0, 1)$) するのに必要な各財の総生産量は、 $x_1 = a_2 / (1 - a_1)$, $x_2 = 1$ となるので、その総生産量を実現するのに必要な労働量 λ_1 は、 $\lambda_1 = l_1 x_1 + l_2 x_2 = l_2 + \frac{a_2}{1 - a_1} l_1$ となり、確かに (1.22) と一致する。 \blacksquare

問題 1.8

(1.17) より、財 1 を 1 単位純生産 (すなわち $(f_1, f_2) = (0, 1)$) するのに必要な各財の総生産量は、 $x_1 = (1 - a_{22}) / \Delta$, $x_2 = a_{21} / \Delta$ となるので、その総生産量を実現するのに必要な労働量 λ_1 は、 $\lambda_1 = l_1 x_1 + l_2 x_2 = \frac{(1 - a_{22})l_1 + a_{21}l_2}{\Delta}$ となり、確かに問題 1.6 の答えと一致する (λ_2 に関して全く同様に確認できる)。 \blacksquare

問題 1.9

財 2 の労働価値 λ_2 は、財 2 を 1 単位純生産する (すなわち $(f_1, f_2) = (0, 1)$) のに必要な労働量のこと。(1.25) より、財 2 を 1 単位純生産するのに必要な各財の総生産量は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって、財 2 の労働価値は、 $\lambda_2 = l_1 x_1 + l_2 x_2 = 2$ となる。 ■

問題 1.10

財 1 の労働価値について考える。一般的な 2 部門モデルにおいて、以下が成立する。

$$(1.a.2) \quad (I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 - a_{11} \\ -a_{21} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -a_{12} \\ 1 - a_{22} \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを図示すると図 1.A.2 のようになる。ベクトル $\begin{pmatrix} 1 - a_{11} \\ -a_{21} \end{pmatrix}$ の傾きがベクトル $\begin{pmatrix} -a_{12} \\ 1 - a_{22} \end{pmatrix}$ の

傾きよりも緩やかなのは、純生産可能条件 (1.14) より以下が成立するからである。

$$1 - a_{11} > 0, \quad 1 - a_{22} > 0, \quad \frac{a_{21}}{1 - a_{11}} < \frac{1 - a_{22}}{a_{12}}$$

これより、ある非負の x_1 と x_2 で、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 - a_{11} \\ -a_{21} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -a_{12} \\ 1 - a_{22} \end{pmatrix}$ の 1 次結合として表現できる

ので、財 1 の労働価値は必ず正となる (財 2 の労働価値についても同様) ■

(図 1.A.2 : (1.a.2) のベクトル図)

問題 1.11

この場合、制約条件は $(B - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので、最小化問題は

$$\min_{x_1, x_2} \lambda_2 = x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1 + 3x_2 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 \geq 1$$

となる。この問題を図示すると下の図 1.A.3 のようになるので、 λ_2 を最小にする (x_1^*, x_2^*) は $x_1^* = 0, x_2^* = 1/2$ となり、対応する財 2 の労働価値は $\lambda_2^* = 1/2$ となる。 ■

(図 1.A.3 : 森嶋型の定義に基づく財 2 の労働価値)

第2章 マルクスの基本定理

- 2. 1 剰余生産量と利潤
- 2. 2 マルクスの基本定理
- 2. 3 一般化された商品搾取定理
- 2. 4 異質労働が存在する場合のマルクスの基本定理

<第2章の目的>

マルクス経済学のメインテーマである搾取の存在条件に関する分析を行う。「マルクスの基本定理」、すなわち各部門の剰余生産量（ないし利潤）が正になるための条件と搾取の存在条件が同値であることを示す。また、その定理の解釈上の含意や頑健性について若干の考察を行う。

2. 1 剰余生産量と利潤

目的：各部門の剰余生産量が正となるための条件（＝剰余生産可能条件）や、各部門の利潤が正となるための条件（＝利潤保障条件）を導出し、両者が同値であることを示す。

<モデル設定>

- ・第1章の1.1節で説明した「基本モデル（＝資本財と消費財の2部門モデル）」を想定
- ・基本モデルの生産技術を再掲すると…

	財1（資本財）	財2（消費財）
財1（資本財）	a_1	a_2
財2（消費財）	0	0
労働	l_1	l_2

- ・労働者は、1単位の労働供給に対して、財2を b 単位受け取ると想定する
→ 財1の1単位の生産に、 a_1 単位の財1と bl_1 単位の財2が必要
財2の1単位の生産に、 a_2 単位の財1と bl_2 単位の財2が必要

<剰余生産可能条件>

- ・財 i の剰余生産量 = 財 i の純生産量 - 労働者への財 i の分配分

(例) 小麦のみが生産される1部門モデル

ある期間の期首に、資本家の保有する小麦（＝種籾）を10kgと、労働者の労働力を投入することで100kgの小麦を生産。その100kgの内、期首に投入した10kgは来期の種籾とし

て持ち越し、60 kgは労働者へ分配、残り 30 kgを資本家が獲得

$$\text{総生産量} = 100 \text{ kg}$$

$$\text{純生産量} = 100 \text{ kg} - 10 \text{ kg} = 90 \text{ kg}$$

$$\text{剰余生産量} = 90 \text{ kg} - 60 \text{ kg} = 30 \text{ kg}$$

・財 1 (資本財) の総生産量を x_1 、財 2 (消費財) の総生産量を x_2 、財 1 (資本財) の剰余生産量を g_1 、財 2 (消費財) の剰余生産量を g_2 と表記すると…

$$(2.1) \quad g_1 = x_1 - (a_1x_1 + a_2x_2), \quad g_2 = x_2 - (bl_1x_1 + bl_2x_2)$$

・両部門の剰余生産量が正となるために投入係数が満たすべき条件は？

$$(2.2) \quad g_1 > 0 \text{ かつ } g_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > a_1x_1 + a_2x_2 \text{ かつ } x_2 > bl_1x_1 + bl_2x_2$$

$$\Leftrightarrow (1-a_1)x_1 > a_2x_2 \text{ かつ } (1-bl_2)x_2 > bl_1x_1$$

(→ これより、 $1-a_1 > 0$ かつ $1-bl_2 > 0$ でなければならない)

$$\Leftrightarrow \frac{bl_1}{1-bl_2} < \frac{x_2}{x_1} < \frac{1-a_1}{a_2}$$

(→ これより、 $(1-a_1)(1-bl_2) - a_2bl_1 > 0$ でなければならない)

(図 2.1 : 両部門の剰余生産量が正となるような (x_1, x_2) の領域)

命題 2.1 (剰余生産可能条件)

両部門の剰余生産量が正となるような (x_1, x_2) が存在するために投入係数が満たすべき条件は以下で与えられる。

$$(2.3) \quad 1-a_1 > 0, \quad 1-bl_2 > 0, \quad (1-a_1)(1-bl_2) - a_2bl_1 > 0$$

※ 直感的には、剰余生産可能条件が成立するためには、純生産可能条件 ($1-a_1 > 0$) が満たされた上で、さらに実質賃金率 b が (2.3) の 2 つ目と 3 つ目の不等式を満たす程度に小さい値でなければならない。

・以上の議論を行列を用いてやり直すと、その数学的構造がはっきりする

(2.1) を行列表示すると…

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_1 & -a_2 \\ -bl_1 & 1-bl_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$g_1 > 0$ かつ $g_2 > 0$ に対して、(2.4) が非負解 (x_1, x_2) を持つための必要十分条件は、ホーキンズ＝サイモンの定理 (← 1.2 節を参照) より、(2.4) の係数行列のすべての主座小行列式が正となることなので、その条件は確かに (2.3) と一致する

問題 2.1

1 単位の労働供給に対して、財 1 が b_1 単位、財 2 が b_2 単位支払われる場合の剰余生産可能条件を求めよ

<利潤保障条件>

- ・利潤を追求する私企業 (= 資本家) が各財を市場で供給する状況を想定
- ・財 1 (資本財) の価格を p_1 , 財 2 (消費財) の価格を p_2 , 第 1 部門の生産 1 単位あたりの利潤を π_1 , 第 2 部門の生産 1 単位あたりの利潤を π_2 とおくと…

$$(2.5) \quad p_1 = a_1 p_1 + b_1 p_2 + \pi_1, \quad p_2 = a_2 p_1 + b_2 p_2 + \pi_2$$

→ この (2.5) は「価格方程式」と呼ばれている

- ・両部門の (単位あたり) 利潤が正となるために投入係数が満たすべき条件は?

$$(2.6) \quad \pi_1 > 0 \text{ かつ } \pi_2 > 0 \Leftrightarrow p_1 > a_1 p_1 + b_1 p_2 \text{ かつ } p_2 > a_2 p_1 + b_2 p_2$$

$$\Leftrightarrow (1 - a_1) p_1 > b_1 p_2 \text{ かつ } (1 - b_2) p_2 > a_2 p_1$$

(→ これより、 $1 - a_1 > 0$ かつ $1 - b_2 > 0$ でなければならない)

$$\Leftrightarrow \frac{a_2}{1 - b_2} < \frac{p_2}{p_1} < \frac{1 - a_1}{b_1}$$

(→ これより、 $(1 - a_1)(1 - b_2) - a_2 b_1 > 0$ でなければならない)

(図 2.2 : 両部門の利潤が正となるような (p_1, p_2) の領域)

- ・ (2.6) より、以下を得る

命題 2.2 (利潤保障条件)

両部門の利潤が正となるような (x_1, x_2) が存在するために投入係数が満たすべき条件は以下で与えられる。

$$(2.7) \quad 1 - a_1 > 0, \quad 1 - b_2 > 0, \quad (1 - a_1)(1 - b_2) - a_2 b_1 > 0$$

∴ 命題 2.1 と命題 2.2 から、剰余生産可能条件と利潤保障条件は一致する!

- ・行列を用いて以上の議論をやり直すと、(2.5) は以下のように書ける

$$(2.8) \quad (\pi_1, \pi_2) = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 1 - a_1 & -a_2 \\ -b_1 & 1 - b_2 \end{pmatrix}$$

$\pi_1 > 0$ かつ $\pi_2 > 0$ に対して、(2.8) が非負解 (p_1, p_2) を持つための必要十分条件は、ホーキンス=サイモンの定理より、(2.8) の係数行列のすべての主座小行列式が正となることな

ので、その条件は確かに (2.7) と一致する

問題 2.2

1 単位の労働供給に対して、財 1 が b_1 単位、財 2 が b_2 単位支払われる場合の利潤保障条件が、問題 2.1 で求めた剰余生産可能条件と一致することを確認せよ。

2. 3 マルクスの基本定理

目的：労働者が搾取される条件を定義し、「剰余生産可能条件」「利潤保障条件」「労働搾取の存在条件」の 3 条件が同値であることを示す

・引き続き、2.1 節の基本モデルを想定する。このモデルでは…

労働者は 1 単位の労働を供給することで、財 2 を b 単位受け取る

財 2 の労働価値 (= 財 2 を 1 単位生産するのに直接・間接に投入する労働量) は λ_2

(→ 労働価値の導出の仕方については、第 1 章の 1.3 節を参照せよ)

∴ 1 単位の労働供給に対して、賃金として獲得できる財の労働価値は $\lambda_2 b$

マルクス経済学では労働搾取を次のように定義する

定義 (基本モデルにおける労働搾取の存在条件)

以下の条件が成立しているとき、労働者は搾取されていると呼ぶ

$$(2.9) \quad \lambda_2 b < 1$$

・(2.9) の右辺は労働者が供給した労働量 (= 「供給労働」)、左辺は賃金として受け取った財の労働価値 (= 「取得労働」) を意味している。すなわち労働搾取とは取得労働が供給労働よりも小さい状況のこと。

(例) $b = 2$ 、 $\lambda_2 = 0.3$ の場合

労働者が 1 時間分の労働を供給することで得た財の労働価値が 0.6 時間分

(→ マルクス経済学では、その差の 0.4 時間分を「(労働供給 1 単位あたりの) 剰余労働」と呼び、その分が資本家によって掠め取られたと解釈する)

(個人的 memo)

(2.9) が成立している状況を「不公正 (unfair)」と考える普遍的な根拠はあるのか？ 取得労働が供給労働より小さくても、労働者がそれを承知した上で自発的に労働を供給するのであれば倫理的に非難すべき余地はないのでは？

・どのような条件の下で労働搾取の存在条件 (2.9) が成立するのか。これを明らかにしたのが以下の「マルクスの基本定理」である

命題 2.3 (マルクスの基本定理)

剰余生産可能条件 (2.3)、利潤保障条件 (2.7)、労働搾取の存在条件 (2.9) の 3 条件は同値である。

∴ この定理は、各部門の剰余生産量が正であるような状況、あるいは各部門で正の利潤が発生しているような状況では、必ず労働者が搾取されていることを示している。(なお、この定理は各部門の正の利潤を保障するいかなる価格の下でも成立する点に注意せよ！)

(証明)

剰余生産可能条件 (2.3) と利潤保障条件 (2.7) の同値性はすでに証明したので、以下では (i) 労働搾取の存在条件 \Rightarrow 剰余生産可能条件の証明と、(ii) 剰余生産可能条件 \Rightarrow 労働搾取の存在条件の証明を行う

・ (i) の証明

基本モデルにおける各財の労働価値 (1.22) を再掲すると…

$$(2.10) \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{1-a_1}, \quad \lambda_2 = l_2 + \frac{a_2}{1-a_1} l_1$$

ここで、これらの労働価値が正であるためには $1-a_1 > 0$ (=純生産可能条件) の成立が不可欠なので、以後これを仮定する。(2.10) の第 2 式を (2.9) へと代入することで

$$\lambda_2 b < 1 \rightarrow bl_2 + \frac{a_2 bl_1}{1-a_1} < 1 \rightarrow (1-a_1)(1-bl_2) - a_2 bl_1 > 0$$

したがって、(2.9) が成立すれば (2.3) が成立する。

・ (ii) の証明

剰余生産可能条件 (2.3) は以下のように書き直せる。

$$bl_2 + \frac{a_2 bl_1}{1-a_1} < 1 \rightarrow b[l_2 + \frac{a_2}{1-a_1} l_1] < 1 \rightarrow \lambda_2 b < 1 \quad (\text{最後で (2.10) を使用})$$

したがって、(2.3) が成立すれば、(2.9) が成立する。 ■

問題 2.3

1 単位の労働供給に対して、財 1 が b_1 単位、財 2 が b_2 単位支払われる場合のマルクスの基本定理を証明せよ。

<マルクスの基本定理が成立する直感的理由>

なぜ各部門の剰余生産量（または利潤）が正のとき、労働搾取が生じるのか？

・基本モデルの価値方程式 (1.21) を再掲すると…

$$(2.11) \quad \lambda_1 = a_1 \lambda_1 + l_1, \quad \lambda_2 = a_2 \lambda_1 + l_2$$

この第1式に x_1 を掛け、第2式に x_2 を掛け、それらを足し合わせて整理すると

$$(2.12) \quad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = l_1 x_1 + l_2 x_2$$

ここで、 f_1 (f_2) は財1 (財2) の純生産量を意味する。

(2.12) は、純生産ベクトル (f_1, f_2) の労働価値が、労働者が供給した総労働量に一致することを示している。したがって、各財の純生産量がすべて労働者に分配された場合のみ、労働者の供給労働と取得労働が一致する。言い換えると、各財の純生産量のいくばくかでも資本家に分配されたら (=剰余生産ないし利潤が正であれば)、労働者の取得労働は供給労働を下回り、労働搾取が生じることになる。

(個人的 memo)

ゆえに、搾取なき経済とは、資本家に純生産物を一切分配しない経済、言い換えると資本家の保有する資本財を無利子で利用できる経済のことである。しかし、労働と同様に資本財も生産に不可欠な要素である以上、そのような状況は資本家の立場からは極めて「不公正」、ないし所有権の侵害と言えるのでは？

2. 4 一般化された商品搾取定理

目的：各財の価値を（労働ではなく）ある特定の財で測ったとき、「その財の搾取の存在条件」が剰余生産可能条件ないし利潤保障条件と一致する（=「一般化された商品搾取定理」）ことを示し、この含意を考察する。

・ここまで、財の価値を労働で測ってきたが、少なくとも理論上は（労働ではなく）ある特定の財で各財の価値を測ることも可能である。

・以下では、基本モデル (=資本財と消費財の2部門モデル) において、財1 (資本財) を価値尺度にして、前節までの議論をやり直してみる。この場合、労働価値ならぬ「資本財価値」の定義は以下のとおり

定義 (資本財価値)

財 i の資本財価値とは、財 i を1単位生産するのに直接・間接に投下された資本財の量を意味する。

- ・基本モデルにおいて（労働も含めた）投入係数表は以下のとおり

表 2.1：（労働も含めた）投入係数表

	財 1（資本財）	財 2（消費財）	労働
財 1（資本財）	a_1	a_2	0
財 2（消費財）	0	0	b
労働	l_1	l_2	0

（※ ここで、実質賃金率 b は「労働を 1 単位（再）生産するのに投入しなければならない財 2（消費財）の量」と捉えられている）

・財 1 の資本財価値を v_1 ，財 2 の資本財価値を v_2 ，労働の資本財価値を v_3 とおくと、価値方程式は以下のとおり

$$(2.13) \quad v_1 = a_1 + v_3 l_1, \quad v_2 = a_2 + v_3 l_2, \quad v_3 = v_2 b$$

（第 1 式の意味）

財 1 の 1 単位の生産には、資本財を直接的に a_1 単位投入することに加え、 l_1 単位の労働の投入を通じて間接的にも $v_3 l_1$ 単位の資本財が投入される。したがって、財 1 の資本財価値は $v_1 = a_1 + v_3 l_1$ となる（→ 第 2 式の意味も同様）。

（第 3 式の意味）

労働の 1 単位の（再）生産には、 b 単位の財 2（＝消費財）が投入される。財 2 の資本財価値は v_2 なので、労働の資本財価値は $v_3 = v_2 b$ となる。

- ・(2.13) を解くと…

$$(2.14) \quad v_1 = a_1 + \frac{a_2 b l_1}{1 - b l_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{1 - b l_2}, \quad v_3 = \frac{a_2 b}{1 - b l_2}$$

ここで、これらの資本財価値が正となるよう、以下を仮定しておく

$$(2.15) \quad 1 - b l_2 > 0$$

・労働搾取の条件 (2.9) は、賃金として受け取った財、すなわち 1 単位の労働の再生産に必要な資源の労働価値が 1 未満、と解釈できる。同様に考えると、資本財搾取の条件とは、1 単位の資本財を生産するのに必要な資源の資本財価値が 1 未満、と定義できる。

定義（資本財搾取の存在条件）

以下の条件が成立しているとき、資本財が搾取されていると呼ぶ

$$(2.16) \quad v_1 < 1$$

このとき、以下を証明できる

命題 2.4 (一般化された商品搾取定理)

剰余生産可能条件 (2.3)、利潤保障条件 (2.7)、資本財搾取の存在条件 (2.16) の 3 条件は同値である。

(証明)

剰余生産可能条件 (2.3) と利潤保障条件 (2.7) の同値性はすでに証明したので、以下では (i) 資本財搾取の存在条件 \Rightarrow 剰余生産可能条件の証明と、(ii) 剰余生産可能条件 \Rightarrow 資本財搾取の存在条件の証明を行う

・ (i) の証明

(2.14) の第 1 式から、(2.16) は $a_1 + \frac{a_2 b l_1}{1 - b l_2} < 1$ を意味し、(2.15) よりこの不等式は

$(1 - a_1)(1 - b l_2) - a_2 b l_1 > 0$ を意味する。したがって、資本財搾取の存在条件 (2.16) の下で $1 - a_1 > 0$ かつ $1 - b l_2 > 0$ かつ $(1 - a_1)(1 - b l_2) - a_2 b l_1 > 0$ が成立するが、これは剰余生産可能条件 (2.3) に他ならない。

・ (ii) の証明

(2.3) より $a_1 + \frac{a_2 b l_1}{1 - b l_2} < 1$ が成立するが、(2.14) よりこれは資本財搾取の存在条件

(2.16) に他ならない。 ■

<一般化された商品搾取定理の含意>

・マルクス経済学では伝統的に、「資本家が正の利潤を享受できるのは、本来労働者に帰属するはずの剰余労働 (= $1 - \lambda_2 b$) を資本家が搾取しているからである」と考えてきた (= 利潤の唯一の源泉としての労働搾取論)。そして「マルクスの基本定理」はこの見方に厳密な証明を与えるものと理解されてきた

→ しかし、このような解釈は妥当なのか?

→ 労働を価値基準にとると確かに「利潤保障条件」 = 「労働搾取の存在条件」を示すことができるが、特定の財を価値基準にとると今度は「利潤保障条件」 = 「特定の財の搾取の存在条件」を示すことができる

→ マルクスの基本定理に基づいて労働搾取を利潤の源泉と主張するなら、同様に、一般化された商品搾取定理に基づいて財の搾取を利潤の源泉と主張することもでき、「利潤の唯一の源泉としての労働搾取論」の論拠が揺らぐことになる

∴ 「資本家は、本来労働者の帰属するはずのものを「盗む」ことで正の利潤を享受してい

なのだ」という資本主義経済に対する理解の仕方は不適切だ、というのが一般化された商品搾取定理から導かれる含意

(個人的 memo)

資本財を価値基準に設定したモデルにおいて、搾取されている (or 搾取している) のは誰なのか？

・労働者の (資本財で測った) 労働供給 1 単位あたりの供給価値は v_3 、取得価値は $v_2 b$ で、両者は (2.13) より一致するので、労働者は搾取から中立的。

・資本家の (資本財で測った) 供給価値は $a_1 x_1 + a_2 x_2$ 、供給価値は $v_1 x_1 + v_2 [x_2 - b(l_1 x_1 + l_2 x_2)]$ となるが、(2.13) より両者は一致することを示せるので、資本家も搾取から中立的。

∴ 資本財を価値基準に設定すると、搾取者 (or 被搾取者) がいなくなり、労働を価値基準に設定した場合と異なる結果が成立するように思える

→ 労働価値と資本財価値を同列のものとして扱うことができるのだろうか？⁶

2. 4 異質労働が存在する場合のマルクスの基本定理

目的：異質な労働が存在する経済においても、各具体労働に支払われる実質賃金率を抽象労働への換算比率として用いれば、マルクスの基本定理が成立することを示す。

ここまで、労働者が供給する労働は同質的と想定して議論を進めてきた。しかし、現実には質や熟練度の異なる複数の具体労働が存在している。そのような経済においてもマルクスの基本定理は成立するのだろうか？

・質や熟練度の異なる労働が存在する場合、労働のタイプごとに各財の労働価値を計算することができる

(例) 2 種類のタイプの労働 (タイプ 1 労働とタイプ 2 労働) が存在する場合

財 1 の「タイプ 1 労働価値」：財 1 の生産に直接・間接に投下されたタイプ 1 労働の量

財 1 の「タイプ 2 労働価値」：財 1 の生産に直接・間接に投下されたタイプ 2 労働の量

→ この場合、(後で説明するように) 労働搾取を定義する際に不都合が生じるので、複数の具体労働を 1 つの「抽象労働」へと換算し直す必要が生じる

→ その換算比率をどのように定めれば異質労働が存在する経済においてもマルクスの基本定理が成立するのかを検討する

⁶ 論拠は異なるが、立命館大学の松尾教授も一般化された商品搾取定理に対してよく似た疑問を呈している (松尾教授のホームページを参照せよ)。

<異質労働モデルの基本設定と労働価値>

- ・資本財（財 1）と消費財（財 2）の 2 種類が生産される
- ・各財を生産するのに、2 種類の労働（タイプ 1 とタイプ 2）が必要
- ・投入係数表は以下のとおり

表 2.2：異質労働モデルの投入係数

	財 1（資本財）	財 2（消費財）
財 1（資本財）	a_1	a_2
財 2（消費財）	0	0
タイプ 1 の労働	l_{11}	l_{12}
タイプ 2 の労働	l_{21}	l_{22}

→ l_{ij} ：財 j を 1 単位生産するのに必要なタイプ i の労働量

- ・具体労働が 2 種類存在するので、下の表 2.3 のように、各財につき「タイプ 1 労働価値」と「タイプ 2 労働価値」の 2 種類の労働価値を定義できる

表 2.3：各財のタイプ別労働価値

	財 1	財 2
タイプ 1 労働価値	λ_{11}	λ_{12}
タイプ 2 労働価値	λ_{21}	λ_{22}

→ λ_{ij} ：財 j の 1 単位の生産に直接・間接に投下されたタイプ i 労働の量

- ・この場合の価値方程式は以下のとおり

$$(2.17) \quad \lambda_{11} = a_1 \lambda_{11} + l_{11}, \quad \lambda_{21} = a_1 \lambda_{21} + l_{21}, \quad \lambda_{12} = a_2 \lambda_{11} + l_{12}, \quad \lambda_{22} = a_2 \lambda_{21} + l_{22}$$

→ 第 1 式を言葉で解釈すると、1 単位の財 1 の生産には、タイプ 1 労働が直接的に l_{11} 単位投下されていることに加え、 a_1 単位の財 1 の投入を通じて間接的にも $a_1 \lambda_{11}$ 単位のタイプ 1 労働が投下されているので、財 1 のタイプ 1 労働価値 λ_{11} は、 $a_1 \lambda_{11}$ （死んだ労働）と l_{11} （生きた労働）の和で表せる（→ 他の式も同様に解釈できる）

- ・(2.17) を解くことで、各財の各タイプ労働価値は…

$$(2.18) \quad \lambda_{11} = \frac{l_{11}}{1-a_1}, \quad \lambda_{21} = \frac{l_{21}}{1-a_1}, \quad \lambda_{12} = \frac{a_2 l_{11}}{1-a_1} + l_{12}, \quad \lambda_{22} = \frac{a_2 l_{21}}{1-a_1} + l_{22}$$

以下、各タイプの労働価値が正となるよう、純生産可能条件 ($1 - a_1 > 0$) を仮定する

問題 2.4

以下のように記号を定める

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$$

これらを用いて価値方程式 (2.17) を行列表示で表せ。

<異質労働モデルにおける剰余生産可能条件>

異質労働モデルにおける剰余生産可能条件を導出する

- ・各タイプの労働に対する実質賃金に関して、以下を想定

タイプ 1 労働を 1 単位供給することで、財 2 (消費財) を b_1 単位得る

タイプ 2 労働を 1 単位供給することで、財 2 (消費財) を b_2 単位得る

→ この場合…

財 1 の 1 単位の生産に、 a_1 単位の財 1 と $b_1 l_{11} + b_2 l_{21}$ 単位の財 2 が必要

財 2 の 1 単位の生産に、 a_2 単位の財 1 と $b_1 l_{12} + b_2 l_{22}$ 単位の財 2 が必要

- ・財 1 の剰余生産量を g_1 , 財 2 の剰余生産量を g_2 と表記すると

$$(2.19) \quad g_1 = x_1 - (a_1 x_1 + a_2 x_2), \quad g_2 = x_2 - [(b_1 l_{11} + b_2 l_{21})x_1 + (b_1 l_{12} + b_2 l_{22})x_2]$$

このとき、以下が成立する

命題 2.5 (異質労働モデルにおける剰余生産可能条件)

異質労働モデルにおいて、両部門の剰余生産量が正となるような (x_1, x_2) が存在するために投入係数が満たすべき条件は以下で与えられる。

$$(2.20) \quad 1 - a_1 > 0, \quad 1 - (b_1 l_{12} + b_2 l_{22}) > 0, \quad (1 - a_1)[1 - (b_1 l_{12} + b_2 l_{22})] - a_2(b_1 l_{11} + b_2 l_{21}) > 0$$

問題 2.5

命題 2.5 を証明せよ。

<異質労働モデルにおける利潤保障条件>

異質労働モデルにおける利潤保障条件を導出し、それが剰余生産可能条件 (2.20) と一致することを確認する

- ・財 1 の価格 p_1 , 財 2 の価格を p_2 , 第 1 部門の生産 1 単位あたりの利潤を π_1 , 第 2 部門の生産 1 単位あたりの利潤を π_2 とおくと、以下の価格方程式が成立する

$$(2.21) \quad p_1 = a_1 p_1 + (b_1 l_{11} + b_2 l_{21}) p_2 + \pi_1, \quad p_2 = a_2 p_1 + (b_1 l_{12} + b_2 l_{22}) p_2 + \pi_2$$

このとき、以下が成立する

命題 2.6 (異質労働モデルにおける利潤保障条件)

両部門の利潤が正となるような (x_1, x_2) が存在するために投入係数が満たすべき条件は (2.20) で与えられる。すなわち、異質労働モデルにおいても剰余生産可能条件と利潤保障条件は一致する。

問題 2.6

命題 2.6 を証明せよ。

<異質労働モデルにおけるマルクスの基本定理>

・労働のタイプごとに労働価値が存在すると、労働搾取を定義することが困難になる

(例) ある労働者が、タイプ 1 労働を y_1 単位、タイプ 2 労働を y_2 単位供給し、 $b_1 y_1 + b_2 y_2$ 単位の財 2 (消費財) を受け取る時、この労働者のタイプ別の供給労働と取得労働は

供給労働：タイプ 1 労働を y_1 、タイプ 2 労働を y_2

取得労働：タイプ 1 労働を $\lambda_{12}(b_1 y_1 + b_2 y_2)$ 、タイプ 2 労働を $\lambda_{22}(b_1 y_1 + b_2 y_2)$

→ この場合、例えば $y_1 < \lambda_{12}(b_1 y_1 + b_2 y_2)$ かつ $y_2 > \lambda_{22}(b_1 y_1 + b_2 y_2)$ が成立する場合、この労働者が搾取者か被搾取者かを判別できない

→ タイプ別の具体労働を 1 つの抽象労働へと換算できれば、そうした困難はなくなる

・1 単位のタイプ 1 (タイプ 2) 労働は、 z_1 (z_2) 単位の抽象労働に換算できると想定

→ このとき、タイプ 1 労働を y_1 単位、タイプ 2 労働を y_2 単位供給した労働者の、抽象労働で測った供給労働と取得労働は…

供給労働： $z_1 y_1 + z_2 y_2$

取得労働： $z_1 \lambda_{12}(b_1 y_1 + b_2 y_2) + z_2 \lambda_{22}(b_1 y_1 + b_2 y_2)$

これより…

定義 (異質労働モデルにおける労働搾取の存在条件)

各具体労働の抽象労働への換算比率を (z_1, z_2) とすると、タイプ 1 労働を y_1 単位、タイプ 2 労働を y_2 単位供給し、実質賃金として $b_1 y_1 + b_2 y_2$ 単位の財 2 (消費財) を受け取る労働者が搾取されている状況とは、以下のように定式化できる

$$(2.22) \quad z_1 \lambda_{12}(b_1 y_1 + b_2 y_2) + z_2 \lambda_{22}(b_1 y_1 + b_2 y_2) < z_1 y_1 + z_2 y_2$$

・ (2.18) より、(2.22) は以下のように書き直せる

$$(2.23) \quad [z_1\{a_2l_{11} + (1-a_1)l_{12}\} + z_2\{a_2l_{21} + (1-a_1)l_{22}\}](b_1y_1 + b_2y_2) < (1-a_1)(z_1y_1 + z_2y_2)$$

このとき、どのような換算比率 (z_1, z_2) を用いれば、異質労働モデルにおいてもマルクスの基本定理が成立するのか？ この点を明らかにしたのが以下の命題である。

命題 2.7 (異質労働モデルにおけるマルクスの基本定理)

異質労働モデルにおいてマルクスの基本定理が成立するのは、各具体労働の抽象労働への換算比率 (z_1, z_2) が以下を満たすとき、そしてそのときのみである。

$$(2.24) \quad z_1 = k_0b_1, \quad z_2 = k_0b_2 \quad (k_0 \text{ は正の定数})$$

∴ この命題は、各具体労働の換算比率 (z_1, z_2) にそれら各具体労働の実質賃金率（の定数倍）を採用した場合にのみ、異質労働モデルにおいてもマルクスの基本定理が成立することを意味している

(証明)

まず、 (z_1, z_2) が(2.24)で与えられるとき、マルクスの基本定理が成立することを示す。

・ 労働搾取の存在条件 (2.23) \Rightarrow 剰余生産可能条件 (2.20) の証明

(2.24) を (2.23) に代入して整理すると

$$(2.25) \quad [b_1\{a_2l_{11} + (1-a_1)l_{12}\} + b_2\{a_2l_{21} + (1-a_1)l_{22}\} - (1-a_1)](b_1y_1 + b_2y_2) < 0$$

さらに両辺を $(b_1y_1 + b_2y_2) > 0$ で割って整理すると

$$(1-a_1)[1 - (b_1l_{12} + b_2l_{22})] - a_2(b_1l_{11} + b_2l_{21}) > 0$$

我々はすでに（労働価値の正值性を保証するため）純生産可能条件： $1 - a_1 > 0$ を仮定したので

$1 - a_1 > 0, \quad 1 - (b_1l_{12} + b_2l_{22}) > 0, \quad (1-a_1)[1 - (b_1l_{12} + b_2l_{22})] - a_2(b_1l_{11} + b_2l_{21}) > 0$ が成立するが、これは剰余生産可能条件 (2.20) に他ならない。

・ 剰余生産可能条件 (2.20) \Rightarrow 労働搾取の存在条件 (2.23) の証明

容易に証明できるので省略。

以上より、 (z_1, z_2) が(2.24)で与えられるとき剰余生産可能条件 (or 利潤保障条件) と労働搾取の存在条件が同値であることが示された。

次に、換算比率 (z_1, z_2) が以下のように定式化される場合、

$$z_1 = k_0 b_1 + k_1, \quad z_2 = k_0 b_2 + k_2$$

すなわち一般に換算比率が実質賃金率に比例しないと想定する場合、マルクスの基本定理が成立するのは $k_1 = k_2 = 0$ の場合のみであることを示す。

この場合、この換算比率を (2.23) に代入して整理することで以下を得る。

$$(2.26) \quad k_0 [b_1 \{a_2 l_{11} + (1-a_1) l_{12}\} + b_2 \{a_2 l_{21} + (1-a_1) l_{22}\} - (1-a_1)] (b_1 y_1 + b_2 y_2) \\ + [k_1 b_1 \{a_2 l_{11} + (1-a_1) l_{12}\} + k_2 b_1 \{a_2 l_{21} + (1-a_1) l_{22}\} - k_1 (1-a_1)] y_1 \\ + [k_1 b_2 \{a_2 l_{11} + (1-a_1) l_{12}\} + k_2 b_2 \{a_2 l_{21} + (1-a_1) l_{22}\} - k_2 (1-a_1)] y_2 \\ < 0$$

ここで、(2.26) の第 2 行 + 第 3 行 = 0 が成立する場合のみ、(2.26) と (2.25) が一致し、マルクスの基本定理が成立する (第 2 行 + 第 3 行の値がゼロ以外の場合、(2.26) \Rightarrow (2.20) か (2.20) \Rightarrow (2.26) のいずれかが不成立となりマルクスの基本定理が成立しなくなる)。

さらに、 (y_1, y_2) の値は任意なので、(2.26) の第 2 行 + 第 3 行 = 0 が成立するためには第 2 行 = 第 3 行 = 0 が成立しなければならないが、それが成立するのは $k_1 = k_2 = 0$ の場合のみである。 ■

<第2章の問題の解答>

問題 2.1

この場合、財1の剰余生産量を g_1 、財2の剰余生産量を g_2 と表記すると…

$$(2.a.1) \quad g_1 = x_1 - [(a_1 + b_1 l_1)x_1 + (a_2 + b_1 l_2)x_2], \quad g_2 = x_2 - (b_2 l_1 x_1 + b_2 l_2 x_2)$$

両財の剰余生産量が正となるために投入係数が満たすべき条件は…

$$\begin{aligned} g_1 > 0 \text{ かつ } g_2 > 0 &\Leftrightarrow x_1 > (a_1 + b_1 l_1)x_1 + (a_2 + b_1 l_2)x_2 \text{ かつ } x_2 > b_2 l_1 x_1 + b_2 l_2 x_2 \\ &\Leftrightarrow [1 - (a_1 + b_1 l_1)]x_1 > (a_2 + b_1 l_2)x_2 \text{ かつ } (1 - b_2 l_2)x_2 > b_2 l_1 x_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{b_2 l_1}{1 - b_2 l_2} < \frac{x_2}{x_1} < \frac{1 - (a_1 + b_1 l_1)}{a_2 + b_1 l_2} \end{aligned}$$

したがって、この場合の剰余生産可能条件は以下のとおり

$$(2.a.2) \quad 1 - b_2 l_2 > 0, 1 - (a_1 + b_1 l_1) > 0, [1 - (a_1 + b_1 l_1)](1 - b_2 l_2) - b_2 l_1(a_2 + b_1 l_2) > 0$$

なお、以上の議論を行列を用いてやり直すと、(2.a.1) は以下のように表せる

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (a_1 + b_1 l_1) & -(a_2 + b_1 l_2) \\ -b_2 l_1 & 1 - b_2 l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

したがって、ホーキンス=サイモンの定理より剰余生産可能条件は確かに (2.a.2) で与えられる。 ■

問題 2.2

この場合、価格方程式は以下ようになる。

$$p_1 = (a_1 + b_1 l_1)p_1 + b_2 l_1 p_2 + \pi_1, \quad p_2 = (a_2 + b_1 l_2)p_1 + b_2 l_2 p_2 + \pi_2$$

これを行列表示すると以下のとおり。

$$(\pi_1, \pi_2) = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 1 - (a_1 + b_1 l_1) & -(a_2 + b_1 l_2) \\ -b_2 l_1 & 1 - b_2 l_2 \end{pmatrix}$$

ホーキンス=サイモンの定理より、利潤保障条件は

$$1 - b_2 l_2 > 0, 1 - (a_1 + b_1 l_1) > 0, [1 - (a_1 + b_1 l_1)](1 - b_2 l_2) - b_2 l_1(a_2 + b_1 l_2) > 0$$

となり、確かに剰余生産可能条件 (2.a.2) と一致する。 ■

問題 2.3

この場合、労働搾取の存在条件は以下のように定義される。

$$(2.a.3) \quad \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b < 1$$

・労働搾取の存在条件 (2.a.3) → 剰余生産可能条件 (2.a.2) の証明

各財の労働価値は (2.10) で与えられるが、これらが正であるためには $1 - a_1 > 0$ (=純

生産可能条件)の成立が不可欠なので、以後これを前提とする。(2.10)を(2.a.3)へと代入することで

$$\begin{aligned}\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b < 1 &\Leftrightarrow \frac{b_1 l_1}{1-a_1} + b_2 l_2 + \frac{a_2 b_2 l_1}{1-a_1} < 1 \\ &\Leftrightarrow b_1 l_1 + a_2 b_2 l_1 < (1-a_1)(1-b_2 l_2)\end{aligned}$$

この最後の不等式は $1-b_2 l_2 > 0$ を含意している。この不等式の両辺に $-b_1 l_1(1-b_2 l_2)$ を加えて整理すると…

$$[1-(a_1+b_1 l_1)](1-b_2 l_2) - b_2 l_1(a_2+b_1 l_2) > 0$$

したがって、(2.a.3)が与えられると

$$1-b_2 l_2 > 0, \quad 1-(a_1+b_1 l_1) > 0, \quad [1-(a_1+b_1 l_1)](1-b_2 l_2) - b_2 l_1(a_2+b_1 l_2) > 0$$

が成立し、問題 2.1 で導出された剰余生産可能条件 (2.a.2) が成立する。

・剰余生産可能条件 (2.a.2) → 労働搾取の存在条件 (2.a.3) の証明

問題 2.1 の (2.a.2) より剰余生産可能条件は

$$1-b_2 l_2 > 0, \quad 1-(a_1+b_1 l_1) > 0, \quad [1-(a_1+b_1 l_1)](1-b_2 l_2) - b_2 l_1(a_2+b_1 l_2) > 0$$

であるが、この3つめの条件は

$$b_1 l_1 + a_2 b_2 l_1 < (1-a_1)(1-b_2 l_2)$$

と書き直すことができ、これと $1-b_2 l_2 > 0$ から $1-a_1 > 0$ が成立するので、剰余生産可能条件 (2.a.2) は結局以下のように書き直せる。

$$\frac{b_1 l_1}{1-a_1} + b_2 l_2 + \frac{a_2 b_2 l_1}{1-a_1} < 1$$

そして、これは労働搾取の存在条件 (2.a.3) に他ならない。 ■

問題 2.4

$$\Lambda = \Lambda A + L \quad \blacksquare$$

問題 2.5

(2.19) より、以下が成立する

$$g_1 > 0 \text{ かつ } g_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 - (a_1 x_1 + a_2 x_2) \text{ かつ } x_2 > [(b_1 l_{11} + b_2 l_{21})x_1 + (b_1 l_{12} + b_2 l_{22})x_2]$$

$$\Leftrightarrow (1-a_1)x_1 > a_2 x_2 \text{ かつ } [1-(b_1 l_{12} + b_2 l_{22})]x_2 > (b_1 l_{11} + b_2 l_{21})x_1$$

(→ これより、 $1-a_1 > 0$ かつ $1-(b_1 l_{12} + b_2 l_{22}) > 0$ でなければならない)

$$\Leftrightarrow \frac{b_1 l_{11} + b_2 l_{21}}{1-(b_1 l_{12} + b_2 l_{22})} < \frac{x_2}{x_1} < \frac{1-a_1}{a_2}$$

(→ これより、 $(1-a_1)[1-(b_1 l_{12} + b_2 l_{22})] - a_2(b_1 l_{11} + b_2 l_{21}) > 0$ でなければならない)

以上より、両部門の剰余生産量が正となるような (x_1, x_2) が存在するために投入係数が満たすべき条件は確かに (2.20) で与えられる。

なお、(2.19) を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_1 & -a_2 \\ -(b_1l_{11}+b_2l_{21}) & 1-(b_1l_{12}+b_2l_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となるので、ホーキンス＝サイモンの定理を用いて剰余生産可能条件が (2.20) となることを証明してもよい。 ■

問題 2.6

(2.21) より

$$\pi_1 > 0 \text{ かつ } \pi_2 > 0 \Leftrightarrow p_1 > a_1p_1 + (b_1l_{11} + b_2l_{21})p_2 \text{ かつ } p_2 > a_2p_1 + (b_1l_{12} + b_2l_{22})p_2$$

$$\Leftrightarrow (1-a_1)p_1 > (b_1l_{11} + b_2l_{21})p_2 \text{ かつ } [1-(b_1l_{12} + b_2l_{22})]p_2 > a_2p_1$$

(→ これより、 $1-a_1 > 0$ かつ $1-(b_1l_{12} + b_2l_{22}) > 0$ でなければならない)

$$\Leftrightarrow \frac{a_2}{1-(b_1l_{12} + b_2l_{22})} < \frac{p_2}{p_1} < \frac{1-a_1}{b_1l_{11} + b_2l_{21}}$$

(→ これより、 $(1-a_1)[1-(b_1l_{12} + b_2l_{22})] - a_2(b_1l_{11} + b_2l_{21}) > 0$ でなければならない)

以上より、両部門の利潤が正となるような (x_1, x_2) が存在するために投入係数が満たすべき条件は確かに (2.20) で与えられる。

なお、(2.21) を行列表示すると

$$(\pi_1, \pi_2) = (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 1-a_1 & -a_2 \\ -(b_1l_{11} + b_2l_{21}) & 1-(b_1l_{12} + b_2l_{22}) \end{pmatrix}$$

となるので、ホーキンス＝サイモンの定理を用いて利潤保障条件が (2.20) となることを証明してもよい。 ■

第3章 均等利潤率と生産価格

3. 1 資本家の利潤最大化行動を明示化した基本モデル
3. 2 均等利潤率とその性質
3. 3 生産価格と労働価値の関係

<第3章の目的>

- ・各部門の利潤率（＝利潤／投下した資本財の価額）が異なる場合、資本家はより利潤率の高い部門に資本財を投下しようとするので、すべての部門で生産量が正になるためには各部門の利潤率は均等化していなければならない（→ その利潤率を「均等利潤率」と呼ぶ）
- ・均等利潤率下で成立する諸財の価格のことを「生産価格」と呼ぶ
- ・この章では、基本モデルに資本家の利潤最大化行動を明示的に導入し、均等利潤率の諸性質や生産価格と労働価値の関係について考察する

3. 1 資本家の利潤最大化行動を明示化した基本モデル

目的：資本家の利潤最大化行動を明示化した基本モデルを提示し、均等利潤率と生産価格を導出する。

- ・今までと同様の基本モデル（＝資本財と消費財の2部門モデル）を想定
- ・経済は資本家階級と労働者階級で構成される

<労働者階級>

- ・労働者階級には同質的な労働者が無数に存在し、その人数を1に基準化する⁷
- ・労働者は1単位の労働供給に対して b 単位の消費財を受け取る（＝実質賃金率が b ）
- ・労働者の労働供給曲線は、実質賃金率 b で水平（＝ b の下で需要に等しいだけ労働を供給する）と仮定する（← 労働が余っている状況を暗黙に仮定）
- ・労働者は受け取った消費財をすべて消費する（＝賃金所得をすべて消費にまわす）

<資本家階級>

- ・同質的な資本家が無数に存在し、その人数を1に基準化する⁸
- ・資本家は、期首に K 単位の資本財を所有し、生産活動を行う際に以下の生産技術（今までと同じ）に無料でアクセスできる

⁷ 正確には、労働者は $[0, 1]$ 区間に無数に存在する、と仮定する

⁸ 正確には、資本家は $[0, 1]$ 区間に無数に存在する、と仮定する

	財 1 (資本財)	財 2 (消費財)
財 1 (資本財)	a_1	a_2
財 2 (消費財)	0	0
労働	l_1	l_2

・資本家は期首に、所有する資本財と雇い入れた労働力を用いて各財をどれだけ生産するかを決定する。労働者に対する賃金は売上収入を受け取った後に支払うものとする(=「賃金後払い」の想定)。また、資本家は売上収入から賃金を支払い、さらに補填投資分(=期首に投入した資本財の価額⁹)を差し引いた残りを利潤(=資本所得)として受け取る(→これは、定常的な単純再生産を可能にするためには次期の生産に備えて補填投資分を積み立てておく必要があるからである)

各財の総生産量を (x_1, x_2) 、利潤を Π とおくと、資本家の利潤最大化問題は…

$$\begin{aligned} \max_{\langle x_1, x_2 \rangle} \quad & \Pi = (p_1 x_1 + p_2 x_2) - [p_1(a_1 x_1 + a_2 x_2) + p_2 b(l_1 x_1 + l_2 x_2)] \\ \text{s.t.} \quad & a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq K \end{aligned}$$

問題 3.1

以下のように記号を定める。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = (l_1, l_2), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad p = (p_1, p_2), \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}$$

これらを用いて、上の利潤最大化問題を行列表示で表せ。

問題 3.2

「賃金前払い」、すなわち売上金が入る前に労働者への賃金を支払う形態を想定すると、資本家の利潤最大化問題はどのように変化するか？

<長期均衡における均等利潤率と生産価格>

・利潤 Π は以下のように展開できる

$$\begin{aligned} (3.1) \quad \Pi &= x_1 [p_1 - (p_1 a_1 + p_2 b l_1)] + x_2 [p_2 - (p_1 a_2 + p_2 b l_2)] \\ &= p_1 a_1 x_1 \times \frac{p_1 - (p_1 a_1 + p_2 b l_1)}{p_1 a_1} + p_1 a_2 x_2 \times \frac{p_2 - (p_1 a_2 + p_2 b l_2)}{p_1 a_2} \\ &= p_1 [a_1 x_1 \times r_1 + a_2 x_2 \times r_2] \end{aligned}$$

⁹ これは現実の経済における減価償却費に相当している。

$$(r_1 = \frac{p_1 - (p_1 a_1 + p_2 b l_1)}{p_1 a_1}, \quad r_2 = \frac{p_2 - (p_1 a_2 + p_2 b l_2)}{p_1 a_2})$$

ここで、 r_1 (r_2) は第 1 部門 (第 2 部門) の利潤率を意味する。

∴ したがって資本家の利潤最大化問題を書き直すと…

$$(3.2) \quad \max_{\langle x_1, x_2 \rangle} \quad \Pi = p_1 [a_1 x_1 \times r_1 + a_2 x_2 \times r_2] \quad \text{s.t.} \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq K$$

・ (3.2) において制約条件が不等式で表わされているが、実際には利潤最大化の観点から常に等号で成立する

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = K$$

これを (3.2) の目的関数 Π に代入することで

$$\Pi = p_1 [(r_1 - r_2) a_1 x_1 + r_2 K]$$

したがって、仮に $r_1 > r_2$ ならば、資本家は利潤最大化の観点から資本財をすべて第 1 部門に投下し、第 2 部門の生産量はゼロとなる (= 端点解が成立する)。

∴ 両部門の生産量が正になるためには、以下が成立しなければならない

$$(3.3) \quad r_1 = r_2 = r$$

この r を「均等利潤率」と呼び、以下これが成立する状況を想定して議論を進める。

なお、(3.3) が成立するとき、資本家はどのような (x_1, x_2) を選択しても、利潤の大きさは $\Pi = r p_1 K$ となる。すなわち利潤を最大化する生産量の組み合わせ (x_1, x_2) は無数に存在し、一意には確定しない。

・ (3.1) に現れている r_1 と r_2 の定義と (3.3) より、均等利潤率下の価格方程式は

$$(3.4) \quad p_1 = (1+r)p_1 a_1 + p_2 b l_1, \quad p_2 = (1+r)p_1 a_2 + p_2 b l_2$$

以下では、財 2 (消費財) を価値尺度 (ニューメール) として議論を進める ($p_2 = 1$ と想定する)。この場合、価格方程式は

$$(3.5) \quad p_1 = (1+r)p_1 a_1 + b l_1, \quad 1 = (1+r)p_1 a_2 + b l_2$$

ここで、実質賃金率 b は外生的に与えられており、 (r, p_1) が内生的に決まるものとする。

この (3.5) を解くことで、均等利潤率 r および (財 2 で測った) 財 1 の生産価格 p_1 は

$$(3.6) \quad r = \frac{1 - b l_2 - (a_1 + b m)}{a_1 + b m}, \quad p_1 = \frac{a_1 + b m}{a_2} \quad (m = a_2 l_1 - a_1 l_2)$$

問題 3.3

「賃金前払い」、すなわち売上金が入る前に労働者への賃金を支払う場合、均等利潤率下の利潤と価格方程式はどのようなになるか。

問題 3.4

投入係数が下の表で与えられる一般的な 2 部門モデルにおいて、資本家の利潤最大化問題、および均等利潤率下の利潤と価格方程式はどのようなになるか。

	財 1	財 2
財 1	a_{11}	a_{12}
財 2	a_{21}	a_{22}
労働	l_1	l_2

3. 2 均等利潤率とその性質

目的：均等利潤率の諸性質を明らかにする。

<正の均等利潤率 ($r > 0$) を保障する条件>

・ (3.1) に現れている r_1 と r_2 の定義から、各部門の利潤率が正であるためには

$$1 - a_1 > 0, \quad 1 - bl_2 > 0$$

が成立しなければならない。

・ (3.6) の均等利潤率 r の分子と分母を書き直すと…

$$\text{分子} (= 1 - bl_2 - (a_1 + bm)) = (1 - a_1)(1 - bl_2) - a_2bl_1$$

$$\text{分母} (= a_1 + bm) = a_1(1 - bl_2) + a_2bl_1$$

このうち分母は上記の $1 - bl_2 > 0$ より正となるので、あと $(1 - a_1)(1 - bl_2) - a_2bl_1 > 0$ が成立すれば $r > 0$ が保障されるが、これは第 2 章の利潤保障条件 (2.7) と同じ

命題 3.1 (正の均等利潤率を保障する条件)

正の均等利潤率 ($r > 0$) を保障する条件は

$$(3.7) \quad 1 - a_1 > 0, \quad 1 - bl_2 > 0, \quad (1 - a_1)(1 - bl_2) - a_2bl_1 > 0$$

で与えられ、これは第 2 章で導出した利潤保障条件 (2.7) と同じである。

<均等利潤率と実質賃金率の関係>

・ (3.6) の第 1 式より、均等利潤率 r と実質賃金率 b の関係を図示すると右下がりの曲線になる (→ これは「賃金・利潤曲線」などと呼ばれる)

(図 3.1 : 賃金・利潤曲線)

命題 3.2 (均等利潤率と実質賃金率の対抗関係)

長期均衡において均等利潤率 r は実質賃金率 b の減少関数となる。

(※ この命題から、資本家と労働者の利害は対立することが分かる)

・図 3.1 に示されているように、許容可能な b の最大値 ($r=0$ のときの b) と、許容可能な r の最大値 ($b=0$ のときの r) はそれぞれ以下ようになる。

$$(3.8) \quad b^{\max} = \frac{1-a_1}{(1-a_1)l_2 + a_2l_1}, \quad r^{\max} = \frac{1-a_1}{a_1}$$

<均等利潤率と労働搾取の存在条件の関係>

第 2 章で議論したように、利潤保障条件と労働搾取の存在条件 ($\lambda_2 b < 1$) は一致する。さらに命題 3.1 で示されたように、利潤保障条件と正の均等利潤率 ($r > 0$) を保障する条件もまた一致する。したがって…

命題 3.3 (マルクスの基本定理)

正の均等利潤率 ($r > 0$) が成立するとき、そしてそのときのみ、労働者が搾取される。

(命題 3.3 の別証明)

基本モデルにおける各財の労働価値を再掲すると

$$(3.9) \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{1-a_1}, \quad \lambda_2 = l_2 + \frac{a_2}{1-a_1} l_1$$

したがって (3.8) および (3.9) より、許容可能な実質賃金率 b の最大値 ($r=0$ のときの b) は $b^{\max} = 1/\lambda_2$ となるので、 $r > 0$ の場合は $b < 1/\lambda_2$ となるが、この不等式は労働搾取の存在条件に他ならない。 ■

<技術革新が均等利潤率に及ぼす影響>

生産費用を削減するような技術革新は、均等利潤率にどのような影響を及ぼすか？

・今まで同様、「賃金後払い」の状況を想定すると価格方程式は (3.5) で与えられる
・ここで、財 1 を (今までと同じ均等利潤率を保障しつつ) 今までより低いコストで生産できる新しい技術、すなわち

$$(3.10) \quad (1+r)p_1 a_1^{\#} + b l_1^{\#} < (1+r)p_1 a_1 + b l_1$$

を満たす新技術 ($a_1^{\#}, l_1^{\#}$) が発明され、資本家がそれを導入したとする。このとき、新たに成立する均等利潤率に関して以下が成立する。

命題 3.4 (柴田=置塩の定理)

費用節約的な新技術の導入により、均等利潤率は上昇する

(証明)

新技術導入後に成立する価格方程式を以下のように表記する。

$$(3.11) \quad p_1^\# = (1+r^\#)p_1^\# a_1^\# + bl_1^\#, \quad 1 = (1+r^\#)p_1^\# a_2 + bl_2$$

(3.5) の第2式と (3.11) の第2式より $(1+r)p_1 = (1+r^\#)p_1^\#$ が成立するので、

$$(3.12) \quad r^\# > r \text{ かつ } p_1^\# < p_1 \quad \text{or} \quad r^\# < r \text{ かつ } p_1^\# > p_1$$

のいずれかが成立する。(3.11) の第1式を展開すると

$$\begin{aligned} p_1^\# &= [(1+r) + (r^\# - r)] [(p_1^\# - p_1) + p_1] a_1^\# + bl_1^\# \\ &= (1+r)a_1^\#(p_1^\# - p_1) + (r^\# - r)p_1^\# a_1^\# + (1+r)p_1 a_1^\# + bl_1^\# \\ &< (1+r)a_1^\#(p_1^\# - p_1) + (r^\# - r)p_1^\# a_1^\# + (1+r)p_1 a_1^\# + bl_1 \end{aligned}$$

となり、この不等式と (3.5) の第1式より以下が成立する。

$$(3.13) \quad [1 - (1+r)a_1^\#](p_1^\# - p_1) < (r^\# - r)p_1^\# a_1^\#$$

ここで、(3.5) の第1式および (3.10) より $1 - (1+r)a_1^\# > 0$ が成立するので、(3.12) と

(3.13) から「 $r^\# > r$ かつ $p_1^\# < p_1$ 」が成立する。 ■

(※ この定理は「実質賃金率 b が一定」という想定の下で成立する点に注意せよ)

(柴田＝置塩の定理のマルクス経済学における位置付け)

・資本家は、剰余労働 (=利潤を労働価値で測ったもの) をより大きくしようとする

「剰余労働」=「労働1時間あたりの剰余労働 (= $1 - \lambda_2 b$)」×「労働時間総数」

したがって、剰余労働をより大きくする方法としては…

(i) 労働者に長時間労働を強いることで労働時間総数を引き上げる

→ これを「絶対的剰余価値生産」と呼ぶ (※ 剰余価値と剰余労働は同じ意味)

(ii) 財の生産に必要な投下労働量 (= λ_2 に該当) を削減するような技術革新を通じて、

労働1時間あたりの剰余労働を引き上げる

→ これを「相対的剰余価値生産」と呼ぶ

・(i) の方法には限度があるので、資本家はやがて (ii) の方法で剰余労働を増やそうとするようになる。しかし、各資本家がこぞって労働節約的な技術を導入すると、「資本の有機的構成」(=各部門の生産に投下された「死んだ労働」と「生きた労働」の比率、3.3 節を参照せよ) が上昇し、それが均等利潤率の趨勢的低下を引き起こす(=「利潤率の趨勢的低下法則」)ことで、長期的には資本主義経済は自滅の途を辿る、とマルクスは考えた。

→ こうしたビジョンは正しいか？

→ 「柴田＝置塩の定理」はこうしたビジョンに対する一つの反論と解釈できる。なぜならこの定理は、資本家が競って導入しようとするような費用削減的な技術革新は、その資本の有機的構成への影響がどうであれ、必ず利潤率を引き上げることを示しているから。

3. 3 生産価格と労働価値の関係

目的：どのような条件下で生産価格が労働価値に比例するかを明らかにする。

<価格理論としての労働価値説>

- ・古典派経済学（特にリカード）の価格理論 → 「(投下) 労働価値説」
- ・労働価値説：2財の交換比率は、それらの労働価値の比率で決まる
(例) 財1の労働価値が2、財2の労働価値が1なら、財1は財2の2個分の価値を持つ
- ・古典派経済学を継承したマルクスも、この学説を受け入れて自らの経済学を構築した
→ このような労働価値説は一般的に成立するか？
一般的に成立しないなら、どのような条件の下でそれが成立するか？

<均等利潤率がゼロ ($r=0$) の場合¹⁰>

- ・ $r=0$ の場合、(3.5)より価格方程式は…

$$(3.14) \quad p_1 = a_1 p_1 + b l_1, \quad 1 = a_2 p_1 + b l_2$$

(※ 均等利潤率を0と特定化しているため、賃金・利潤曲線(3.6)より、対応する実質賃金率 b が内生的に決まる点に注意。すなわち、ここでは b は内生変数扱いとなる)

- ・(3.14)を解くことで、(財2で測った)財1の生産価格 p_1 は

$$p_1 = \frac{l_1}{l_2 + (a_2 l_1 - a_1 l_2)}$$

一方、(3.9)より労働価値比率も

$$(3.15) \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{l_1}{l_2 + (a_2 l_1 - a_1 l_2)}$$

となるので、利潤率がゼロの場合、両者は一致する。

問題 3.5

名目賃金率(= $p_2 b$)を価値尺度にしても同じ結果が成立することを示せ。

<均等利潤率が正 ($r > 0$) の場合>

- ・均等利潤率が正の場合、生産価格比率と労働価値比率が一般に一致しないのは(3.6)の第2式と(3.15)より明らか
→ では、どのような条件の下で両者は一致するか？

¹⁰ $r=0$ を想定するという事は、資本家が所有する資本財を無利子で利用できる(=資本財を共有財産のように利用できる)ような経済を想定することを意味する。したがって、そのような経済はむしろ共産主義経済に近いと言える。第4章でも、全員が自営業者であるような「単純商品生産経済」において、資本財が共有される場合には生産価格と労働価値が比例し、搾取が生じないことを確認する。

・各部門の「資本の有機的構成」とは、生産1単位あたりに投下された「死んだ労働」（＝資本財の投入を通じて間接的に投下された労働量）と「生きた労働」（＝直接的に投下された労働量）の比率、と定義される

→ 基本モデルにおいて第1（第2）部門の生産の有機的構成は $\frac{\lambda_1 a_1}{l_1}$ ($\frac{\lambda_1 a_2}{l_2}$)

このとき、以下が成立する

命題 3.5 (生産価格比率と労働価値比率が一致する条件)

均等利潤率が正とする。生産価格の比率が労働価値の比率と一致するのは、両部門の資本の有機的構成が一致する場合、そしてそのときのみである。

$$(3.16) \quad \frac{\lambda_1 a_1}{l_1} = \frac{\lambda_1 a_2}{l_2}$$

(証明)

(i) (3.16) が成立すれば、生産価格比率と労働価値比率が一致することの証明
価格方程式 (3.5) を展開すると

$$p_1 = l_1 [(1+r)p_1 \frac{a_1}{l_1} + b], \quad 1 = l_2 [(1+r)p_1 \frac{a_2}{l_2} + b]$$

したがって、(3.16) が成立するとき、生産価格比率 p_1 は以下ようになる。

$$p_1 = l_1 / l_2$$

これは、両部門の資本の有機的構成が等しい場合、生産価格比率は直接的に投下された単位労働量の比率に等しくなることを意味している。

一方、(3.16) が成立するとき、労働価値比率は (3.15) より

$$\lambda_1 / \lambda_2 = l_1 / l_2$$

となり、これも直接的に投下された単位労働量の比率に等しくなる。以上より、(3.16) が成立すれば、生産価格比率と労働価値比率が一致することが示された。

(ii) 生産価格比率と労働価値比率が一致すれば、(3.16) が成立することの証明
(3.6) と (3.15) より、生産価格比と労働価値比が一致するならば、以下が成立する。

$$\frac{a_1 + bm}{a_2} = \frac{l_1}{l_2 + m} \quad (m = a_2 l_1 - a_1 l_2)$$

これを展開すると、以下が成立する。

$$m [1 - bl_2 - (a_1 + bm)] = 0$$

ところが (3.6) より均等利潤率は $r = \frac{1 - bl_2 - (a_1 + bm)}{a_1 + bm}$ で与えられ、かつ $r > 0$ よりその

分子の値は非ゼロとなるので、 $m = 0$ が成立する。 ■

∴ 以上より、均等利潤率が正という標準的なケースにおいては、一般に生産価格と労働価値は比例しないことが明らかとなった

→ 価格理論としての労働価値説はもはや説得力が無い

→ マルクス経済学における労働価値概念の意義は、それを搾取の定義に利用できる点のみ
(=厚生指標の一種としての労働価値概念)

∴ 近代経済学とマルクス経済学の根本的な違いは、「労働価値概念に基づく搾取」という規範的意味合いの強い概念を受け入れるか否か、という点にあると考えられる

問題 3.6

第 1 部門の資本の有機的構成の方が高いとき、生産価格比率と労働価値比率との間にはどのような関係が成立するか？

問題 3.7 (難)

問題 3.2 や問題 3.3 の検討した「賃金前払い」型の経済に関しても、命題 3.1～命題 3.5 がすべて成立することを証明せよ。

<第3章の問題の解答>

問題 3.1

$$\max_{\langle X \rangle} \quad \Pi = px - (pAx + pBLx) \quad \text{s.t.} \quad pAx \leq p\omega \quad \blacksquare$$

問題 3.2

利潤の定義に変化はない。制約式が以下のように変化する。

$$p_1(a_1x_1 + a_2x_2) + p_2b(l_1x_1 + l_2x_2) \leq p_1K$$

これは、資本財コスト (= $p_1(a_1x_1 + a_2x_2)$) と賃金コスト (= $p_2b(l_1x_1 + l_2x_2)$) の両方を、期首に所有する資本金 (= 資本財の価額 p_1K) から賄う必要があるからである。 ■

問題 3.3

この場合、利潤最大化問題は以下のようになる。

$$\max_{\langle x_1, x_2 \rangle} \quad \Pi = (p_1x_1 + p_2x_2) - [p_1(a_1x_1 + a_2x_2) + p_2b(l_1x_1 + l_2x_2)]$$

$$\text{s.t.} \quad p_1(a_1x_1 + a_2x_2) + p_2b(l_1x_1 + l_2x_2) \leq p_1K$$

資本家の利潤 Π を展開すると…

$$\begin{aligned} \Pi &= x_1[p_1 - (p_1a_1 + p_2bl_1)] + x_2[p_2 - (p_1a_2 + p_2bl_2)] \\ &= (p_1a_1 + p_2bl_1)x_1 \times r_1 + (p_1a_2 + p_2bl_2)x_2 \times r_2 \\ &\quad \left(r_1 = \frac{p_1 - (p_1a_1 + p_2bl_1)}{p_1a_1 + p_2bl_1}, \quad r_2 = \frac{p_2 - (p_1a_2 + p_2bl_2)}{p_1a_2 + p_2bl_2} \right) \end{aligned}$$

ここで、利潤率の分母が生産 1 単位あたりに投下した資本財コストと賃金コストの和となっている点に注意せよ。これは、賃金前払いのシステムの下では、生産に先立って資本財コストだけでなく賃金コストも期首の資本金 p_1K から賄う必要があるからである。

均等利潤率 ($r_1 = r_2 = r$) が成立するとき、利潤 Π は…

$$\begin{aligned} \Pi &= r[(p_1a_1 + p_2bl_1)x_1 + (p_1a_2 + p_2bl_2)x_2] \\ &= r[p_1(a_1x_1 + a_2x_2) + p_2b(l_1x_1 + l_2x_2)] \\ &= rp_1K \end{aligned}$$

また、 r_1 と r_2 の定義およびその均等化条件から、価格方程式は以下のようになる。

$$p_1 = (1+r)(p_1a_1 + p_2bl_1), \quad p_2 = (1+r)(p_1a_2 + p_2bl_2) \quad \blacksquare$$

問題 3.4

賃金後払いを前提とすると、資本家の利潤最大化問題は以下のとおり。

$$\max_{\langle x_1, x_2 \rangle} \quad \Pi = (p_1x_1 + p_2x_2) - [(p_1a_{11} + p_2a_{21})x_1 + (p_1a_{12} + p_2a_{22})x_2 + p_2b(l_1x_1 + l_2x_2)]$$

$$\text{s.t. } (p_1 a_{11} + p_2 a_{21})x_1 + (p_1 a_{12} + p_2 a_{22})x_2 \leq p_1 K_1 + p_2 K_2$$

ここで、資本家の利潤 Π を展開すると…

$$\begin{aligned} \Pi &= x_1 [p_1 - \{(p_1 a_{11} + p_2 a_{21}) + p_2 b l_1\}] + x_2 [p_2 - \{(p_1 a_{12} + p_2 a_{22}) + p_2 b l_2\}] \\ &= (p_1 a_{11} + p_2 a_{21})x_1 \times r_1 + (p_1 a_{12} + p_2 a_{22})x_2 \times r_2 \\ &\quad \left(r_1 = \frac{p_1 - [(p_1 a_{11} + p_2 a_{21}) + p_2 b l_1]}{p_1 a_{11} + p_2 a_{21}}, \quad r_2 = \frac{p_2 - [(p_1 a_{12} + p_2 a_{22}) + p_2 b l_2]}{p_1 a_{12} + p_2 a_{22}} \right) \end{aligned}$$

均等利潤率 ($r_1 = r_2 = r$) が成立するとき、利潤 Π は…

$$\begin{aligned} \Pi &= r [(p_1 a_{11} + p_2 a_{21})x_1 + (p_1 a_{12} + p_2 a_{22})x_2] \\ &= r [p_1 K_1 + p_2 K_2] \end{aligned}$$

また、 r_1 と r_2 の定義およびその均等化条件から、価格方程式は以下のようになる。

$$p_1 = (1+r)(p_1 a_{11} + p_2 a_{21}) + p_2 b l_1, \quad p_2 = (1+r)(p_1 a_{12} + p_2 a_{22}) + p_2 b l_2 \quad \blacksquare$$

問題 3.5

$r=0$ の場合、(財 2 の価格を価値尺度にする前の) 価格方程式は (3.4) より

$$(3.a.1) \quad p_1 = p_1 a_1 + p_2 b l_1, \quad p_2 = p_1 a_2 + p_2 b l_2$$

名目賃金率を価値尺度とするということは

$$p_2 b = 1$$

を想定することを意味するので、この場合、(3.a.1) は

$$p_1 = p_1 a_1 + l_1, \quad p_2 = p_1 a_2 + l_2$$

となり、各財の生産価格は以下のようになる。

$$p_1 = \frac{l_1}{1-a_1} (= \lambda_1), \quad p_2 = l_2 + \frac{a_2}{1-a_1} l_1 (= \lambda_2)$$

ゆえにこの場合、生産価格と労働価値は一致し、その比率もまた一致する。 \blacksquare

問題 3.6

第 1 部門の資本の有機的構成の方が高いということは、以下を意味する。

$$(3.a.2) \quad \frac{\lambda_1 a_1}{l_1} > \frac{\lambda_1 a_2}{l_2} \Leftrightarrow a_2 l_1 - a_1 l_2 (= m) < 0$$

(3.6) の第 2 式、および (3.15) より

$$p_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a_1 + bm}{a_2} - \frac{l_1}{l_2 + m} = \frac{(a_1 + bm)(l_2 + m) - a_2 l_1}{a_2(l_2 + m)}$$

ここで、分子と分母を計算すると

$$\text{分子} = -m [1 - b l_2 - (a_1 + bm)] = -m [(1 - a_1)(1 - b l_2) - a_2 b l_1]$$

$$\text{分母} = a_2 [(1 - a_1) l_2 + a_2 l_1]$$

となり、(3.a.2) および (3.7) より、両方ともその符号は正となる。したがって

$$p_1 > \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

が成立し、第 1 部門の生産の有機的構成の方が高い場合、財 1 の相対価格はその労働価値比率よりも大きくなる。 ■

問題 3.7

省略。命題 3.1、命題 3.2、命題 3.3、命題 3.5 の証明については置塩・鶴田・米田（著）の「経済学」（大月書店）の第 6 章（の巻末付録）を、命題 3.4 については大西広「マルクス経済学」（慶應義塾大学出版会）の第 4 章を参照せよ。

第4章 単純商品生産経済

- 4. 1 資本財が存在しない場合
- 4. 2 資本財が共有財産の場合
- 4. 3 資本財が私有財産の場合

<第4章の目的>

ここまで、利潤が存在する経済では労働者が資本家によって搾取されることを見てきた
→ では、雇う者と雇われる者が分離していない経済 (=全員が自営業者であるような経済)
では搾取は生じないのか?

→ この点を検討すべく「単純商品生産経済」をモデル化し、そのような経済における生産価格と労働価値の関係や搾取の有無について検討する

4. 1 資本財が存在しない場合

目的：生産要素が労働のみの単純商品生産経済をモデル化し、生産価格と労働価値の関係や搾取の有無について検討する

<モデルの設定>

- ・ 1種類の生産要素 (=労働) から、2種類の消費財 (財1と財2) が生産される
- ・ 財1 (財2) の1単位の生産に必要な労働量は l_1 (l_2)
→ 財1 (財2) の労働価値を λ_1 (λ_2) はそれぞれ…

$$(4.1) \quad \lambda_1 = l_1, \quad \lambda_2 = l_2$$

(表 4.1: 資本財が存在しない単純商品生産経済の投入係数)

	財1	財2
労働	l_1	l_2

- ・ n 人の個人が存在し、各人は上記の生産技術に無料でアクセス可能
- ・ 各個人は自営業的に働いて各財を生産する (=労働市場のない経済を想定する)
- ・ 個人 i が生産する財1の量を x_1^i 、財2の量を x_2^i と表記する
- ・ 個人 i は、自分が生産した財の組み合わせ (x_1^i, x_2^i) を財市場で売り、自分が消費したい財の組み合わせ (b_1^i, b_2^i) を買う。ここで、 b_1^i (b_2^i) は個人 i の財1 (財2) の消費量 (← 正の値を想定) で、分析の単純化のため (b_1^i, b_2^i) は外生的に与えられていると仮定
- ・ 個人 i は所与の消費 (b_1^i, b_2^i) を可能にする最小の労働時間を選択する

∴ 以上の設定から明らかなように、単純商品生産経済とは、労働市場（＝雇用契約）の存在しない自営業的な市場経済のこと

<個人の最適化行動と長期均衡における生産価格>

・以上より、個人 i の最適化問題は…

$$(4.2) \quad \min_{\langle x_1^i, x_2^i \rangle} L^i = l_1 x_1^i + l_2 x_2^i \quad \text{s.t.} \quad p_1 b_1^i + p_2 b_2^i \leq p_1 x_1^i + p_2 x_2^i$$

(※ 制約条件は不等式で表わされているが、実際には労働時間最小化の観点から常に等号で成立する)

・制約条件を書き直すと…

$$(4.3) \quad x_2^i \geq -\frac{p_1}{p_2} x_1^i + \frac{p_1 b_1^i + p_2 b_2^i}{p_2}$$

→ 制約条件のフロンティアは、 (x_1^i, x_2^i) 平面上で傾き $-\frac{p_1}{p_2}$ の直線

・目的関数を書き直すと…

$$(4.4) \quad x_2^i = -\frac{l_1}{l_2} x_1^i + \frac{L^i}{l_2}$$

→ この直線は、一定の労働時間 L^i の下で生産可能な各財の組み合わせ (x_1^i, x_2^i) を意味し、「等労働時間線」と呼ばれる。制約条件の領域と重なる等労働時間線の中で、 L^i を最小にするような (x_1^i, x_2^i) を求めたい

∴ したがって、問題 (4.2) を図で示すと…

(図 4.1：資本財が存在しない単純商品生産経済における個人 i の最適化問題)

・図 4.1 から明らかなように、この問題は制約条件 (4.3) と等労働時間線 (4.4) の傾きの関係から 3 つのケースに場合分けできる

$$(i) \quad \frac{p_1}{p_2} > \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{もしくは} \quad \frac{p_1}{l_1} > \frac{p_2}{l_2}) \quad \text{の場合}$$

(=財 1 の生産の方が、労働 1 単位あたりの収入が大きい場合)

図 4.1.a のようになり、財 1 の生産に特化することで労働時間 L^i が最小になる

→ 財 2 の総生産量は $\sum_{i=1}^n x_2^i = 0$ 、財 2 の総需要量は $\sum_{i=1}^n b_2^i > 0$ となり、 p_2 が上昇

→ やがて $\frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2}$ へと収束

(ii) $\frac{p_1}{p_2} < \frac{l_1}{l_2}$ の場合

図 4.1.b のようになり、財 2 の生産に特化することで労働時間 L^i を最小になる

→ 財 1 の総生産量は $\sum_{i=1}^n x_1^i = 0$ 、財 1 の総需要量は $\sum_{i=1}^n b_1^i > 0$ となり、 p_1 が上昇

→ やがて $\frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2}$ へと収束

∴ 長期的には図 4.1.c (ケース (iii)) で描かれた状況、すなわち以下が成立する

$$(4.5) \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

・(4.5) が成立するとき、制約フロンティア上のすべての生産点が労働時間最小化と整合的となるので、各個人にとっては制約フロンティア上のどの生産点を選択してもかまわないが、経済全体では以下の需給均衡条件が成立しなければならない

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^n x_1^i = \sum_{i=1}^n b_1^i, \quad \sum_{i=1}^n x_2^i = \sum_{i=1}^n b_2^i$$

なお、(4.6) の 2 本の均衡条件の内、どちらか一方が成立すれば、もう一方も必ず成立する。なぜなら、各個人の制約条件を足し合わせ、かつ制約条件が等号で成立することを考慮すると、常に以下が成立するから。

$$(4.7) \quad p_1 \left[\sum_{i=1}^n b_1^i - \sum_{i=1}^n x_1^i \right] + p_2 \left[\sum_{i=1}^n b_2^i - \sum_{i=1}^n x_2^i \right] = 0$$

この (4.7) は「ワルラス法則」と呼ばれている。

・すでに見たように長期均衡では (4.5) が成立するが、他方、各財の労働価値は (4.1) で与えられるので、長期均衡において以下が成立する

$$(4.8) \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

∴ 資本財の存在しない単純商品生産経済の長期均衡では、生産価格比率と労働価値比率は一致する

<長期均衡における搾取の有無>

このモデルの長期均衡において搾取は存在するか？

・個人 i の最小化された労働時間 L^i は図 4.1.c より

$$(4.9) \quad \frac{L^i}{l_2} = \frac{p_1 b_1^i + p_2 b_2^i}{p_2}$$

を満たす。長期均衡では (4.8) が成立するので、(4.9) は以下のように書き直せる

$$(4.10) \quad L^i = \lambda_1 b_1^i + \lambda_2 b_2^i$$

この式の左辺は個人 i の供給労働、右辺は個人 i の取得労働を意味しているので、(4.10) はすべての個人について供給労働と取得労働が一致する (=すべての個人が搾取から中立的となる) ことを示している。

以上、この節の結論をまとめると…

命題 4.1 (資本財の存在しない単純商品生産経済の性質)

資本財の存在しない単純商品生産経済の長期均衡において、生産価格比率と労働価値比率は一致し、すべての個人は搾取から中立的となる。

4. 2 資本財が共有財産の場合

目的：資本財が社会の共有財産であるような共産主義的な単純商品生産経済において、生産価格と労働価値の関係や搾取の有無について検討する

<基本モデルの設定>

- ・財 1 (=万能資本財) と財 2 (=消費財) と 2 種類の財が生産される
- ・財 1 (=万能資本財) は、資本財としても消費財としても利用できる
- ・生産技術は今までの基本モデルと同様、以下のとおり

(表 4.2 : 資本財が存在する単純商品生産経済の投入係数)

	財 1 (万能資本財)	財 2 (消費財)
財 1 (万能資本財)	a_1	a_2
財 2 (消費財)	0	0
労働	l_1	l_2

→ 財 1 の労働価値 λ_1 、財 2 の労働価値を λ_2 とおくと、それぞれの値は…

$$(4.11) \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{1-a_1}, \quad \lambda_2 = l_2 + \frac{a_2}{1-a_1} l_1$$

- ・ n 人の個人が存在し、各人は上記の生産技術に無料でアクセス可能
- ・各個人は「資本金 (=資本財を仕入れる資金)」を無利子で借りることができる
- ・各個人は自営的に働いて各財を生産する (=労働市場の無い経済を想定する)
 - 個人 i が生産する財 1 の量を x_1^i 、財 2 の量を x_2^i と表記する
- ・個人 i は、自分が生産した財バスケット (x_1^i, x_2^i) を財市場で売り、期首に借りた資本金を

返済した後、自分が消費したい財バスケット (b_1^i, b_2^i) を買う。ここで、 b_1^i (b_2^i) は個人 i の財 1 (財 2) の消費量 (正值を想定) で、分析の単純化のため (b_1^i, b_2^i) は所与とする

- ・個人 i は所与の消費 (b_1^i, b_2^i) を可能にする最小の労働時間を選択する

<個人の最適化行動と長期均衡における生産価格>

- ・以上の設定より、個人 i の最適化問題は…

$$(4.12) \quad \min_{\langle x_1^i, x_2^i \rangle} L^i = l_1 x_1^i + l_2 x_2^i \quad \text{s.t.} \quad p_1(a_1 x_1^i + a_2 x_2^i) + p_1 b_1^i + p_2 b_2^i \leq p_1 x_1^i + p_2 x_2^i$$

すなわち、個人 i は販売総額 $p_1 x_1^i + p_2 x_2^i$ から生産前に借りた資本金 $p_1(a_1 x_1^i + a_2 x_2^i)$ を返し、残りを消費財の購入に充てる

(※ 制約条件は不等式で表わされているが、実際には労働時間最小化の観点から制約条件は常に等号で成立する)

- ・制約条件を書き直すと…

$$(4.13) \quad x_2^i \geq -\frac{p_1(1-a_1)}{p_2-p_1a_2} x_1^i + \frac{p_1b_1^i+p_2b_2^i}{p_2-p_1a_2}$$

(ここで、式変形の過程で $p_2 - p_1a_2 > 0$ を仮定した。これは財 2 の生産 1 単位あたりの売上げが資本財コストを上回ることを意味している。)

→ 制約条件のフロンティアは、 (x_1^i, x_2^i) 平面上で傾き $-\frac{p_1(1-a_1)}{p_2-p_1a_2}$ の直線

- ・目的関数を書き直して等労働時間線を求めると…

$$(4.14) \quad x_2^i = -\frac{l_1}{l_2} x_1^i + \frac{L^i}{l_2}$$

→ 制約条件の領域と重なる等労働時間線の中で、 L^i を最小にする (x_1^i, x_2^i) を求める

∴ したがって、問題 (4.12) を図で示すと…

(図 4.2 : 共産主義的な単純商品生産経済における個人 i の最適化問題)

・図 4.2 から明らかなように、この問題は制約条件 (4.13) と等労働時間線 (4.14) の傾きの関係から 3 つのケースに場合分けできる

$$(i) \quad \frac{p_1(1-a_1)}{p_2-p_1a_2} > \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{もしくは、} \frac{p_1(1-a_1)}{l_1} > \frac{p_2-p_1a_2}{l_2}) \quad \text{の場合}$$

(=財 1 の生産の方が、労働 1 単位あたりの純収入が大きい場合)

図 4.2.a のようになり、財 1 の生産に特化することで労働時間 L^i が最小になる

→ 財 2 の総生産量は $\sum_{i=1}^n x_2^i = 0$ 、財 2 の総需要量は $\sum_{i=1}^n b_2^i > 0$ となり、 p_2 が上昇

→ やがて $\frac{p_1(1-a_1)}{p_2 - p_1 a_2} = \frac{l_1}{l_2}$ へと収束

(ii) $\frac{p_1(1-a_1)}{p_2 - p_1 a_2} < \frac{l_1}{l_2}$ の場合

(i) と同様の考察により、財 1 の価格が上昇し、やがて $\frac{p_1(1-a_1)}{p_2 - p_1 a_2} = \frac{l_1}{l_2}$ へと収束

∴ 長期的には図 4.2.c (ケース (iii)) で描かれた状況、すなわち以下が成立する

$$(4.15) \quad \frac{p_1(1-a_1)}{p_2 - p_1 a_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

・ (4.15) が成立するとき、制約フロンティア上のすべての生産点が労働時間最小化と整合的となるので各個人にとっては制約フロンティア上のどの生産点を選択してもかまわないが、経済全体では以下の需給均衡条件が成立しなければならない

$$(4.16) \quad \sum_{i=1}^n x_1^i = \sum_{i=1}^n (a_1 x_1^i + a_2 x_2^i) + \sum_{i=1}^n b_1^i, \quad \sum_{i=1}^n x_2^i = \sum_{i=1}^n b_2^i$$

問題 4.1

(4.16) の 2 つの需給均衡条件の内、どちらか一方が成立すれば、もう一方も必ず成立することを示せ。

・長期均衡において成立する (4.15) を変形すると以下になる

$$(4.17) \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2 + (a_2 l_1 - a_1 l_2)}$$

一方、(4.11) より以下が成立する

$$(4.18) \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{l_1}{l_2 + (a_2 l_1 - a_1 l_2)}$$

∴ 共産主義的な単純商品生産経済の長期均衡において、生産価格比率と労働価値比率は一致する

<長期均衡における搾取の有無>

このモデルの長期均衡において搾取は存在するか？

・個人 i の最小化された労働時間 L^i は図 4.2.c より

$$\frac{L^i}{l_2} = \frac{p_1 b_1^i + p_2 b_2^i}{p_2 - p_1 a_2}$$

これに (4.17) を代入することで個人 i の労働時間 L^i (=供給労働) は以下のようになる

$$L^i = \frac{b_1^i l_1 + b_2^i (l_2 + m)}{1 - a_1} \quad (m \equiv a_2 l_1 - a_1 l_2)$$

他方、個人 i の取得労働 (=消費する財バスケットの労働価値) は (4.11) より

$$\lambda_1 b_1^i + \lambda_2 b_2^i = \frac{b_1^i l_1 + b_2^i (l_2 + m)}{1 - a_1}$$

したがって、すべての個人に関して供給労働と取得労働が一致する (=すべての個人が搾取から中立的となる)。

以上、この節の結論をまとめると…

命題 4.2 (共産主義的な単純商品生産経済の性質)

共産主義的な単純商品生産経済の長期均衡において、生産価格比率と労働価値比率は一致し、すべての個人は搾取から中立的となる。

4. 3 資本財が私有財産の場合

目的：資本財が私有財産であるような単純商品生産経済において、生産価格と労働価値の関係や搾取の有無を検討する

<個人の最適化行動と長期均衡における生産価格>

- ・モデルの設定は、基本的に前節の共産主義的な単純商品生産経済と同じ
- ・前節のモデルとの違いは、個人 i は期首に K^i 単位の財 1 (=万能資本財) を賦与され、それを用いて生産活動を行う点 (=資本財をレンタルできる市場は存在しない)

- ・個人 i の最適化問題は以下のように定式化される

$$\begin{aligned} \min_{\langle x_1^i, x_2^i \rangle} \quad & L^i = l_1 x_1^i + l_2 x_2^i \\ \text{s.t.} \quad & p_1 (a_1 x_1^i + a_2 x_2^i) + p_1 b_1^i + p_2 b_2^i \leq p_1 x_1^i + p_2 x_2^i, \quad a_1 x_1^i + a_2 x_2^i \leq K^i \end{aligned}$$

(制約条件に関する注意点)

- (i) 制約条件に 2 つ目の不等式 (資本財制約) が加わっている点が前節との主要な違い
- (ii) 1 つ目の制約条件 (予算制約) は、個人 i は販売収入 $p_1 x_1^i + p_2 x_2^i$ から補填投資分 (=生産過程に投入した資本財の価額) を差し引いた残りを消費財の購入に充てることを意味

している。(→ 単純再生産が可能であるような経済を前提とするなら、この想定が不可欠)

・制約条件を書き直すと…

$$(4.19) \quad x_2^i \geq -\frac{p_1(1-a_1)}{p_2-p_1a_2} x_1^i + \frac{p_1b_1^i + p_2b_2^i}{p_2-p_1a_2} \quad (\leftarrow p_2 - p_1a_2 > 0 \text{ を仮定})$$

$$(4.20) \quad x_2^i \leq -\frac{a_1}{a_2} x_1^i + \frac{K^i}{a_2}$$

→ 両方の制約を (x_1^i, x_2^i) 平面上に図示すると…

(図 4.3 : 私有財産型の単純商品生産経済における個人 i の制約条件)

以下の 3 パターンが考えられる

(i) (4.19) が完全に (4.20) の右上に位置する場合

→ 両方の制約を満たす領域 (x_1^i, x_2^i) は存在しない

(ii) (4.19) が完全に (4.20) の左下に位置する場合

→ 両方の制約を満たす領域 (x_1^i, x_2^i) は存在する (=斜線部分)

(iii) (4.19) と (4.20) が重なる場合

→ 両方の制約を満たす領域 (x_1^i, x_2^i) は存在する (=斜線部分)

∴ 考慮すべきなのは (ii) と (iii) のケース

・目的関数を書き直して等労働時間線を求めると…

$$(4.21) \quad x_2^i = -\frac{l_1}{l_2} x_1^i + \frac{L^i}{l_2}$$

→ 制約条件の領域と重なる等労働時間線の中で L^i を最小にする (x_1^i, x_2^i) を求める

・なお、資本財の賦与量の合計 (= $\sum_{i=1}^n K^i$) は以下の条件を満たさなければならない

$$(4.22) \quad \frac{a_1 \sum_{i=1}^n b_1^i + a_2 \sum_{i=1}^n b_2^i}{1-a_1} \leq \sum_{i=1}^n K^i$$

この条件の導出方法は以下のとおり。各財の需給均衡条件 (4.16) より

$$\sum_{i=1}^n x_1^i = \frac{\sum_{i=1}^n b_1^i + a_2 \sum_{i=1}^n b_2^i}{1-a_1}, \quad \sum_{i=1}^n x_2^i = \sum_{i=1}^n b_2^i$$

が成立し、これを個人 i の 2 つ目の制約条件 (=資本財制約) を集計した不等式 :

$$a_1 \sum_{i=1}^n x_1^i + a_2 \sum_{i=1}^n x_2^i \leq \sum_{i=1}^n K^i$$

に代入することで (4.22) が導かれる。

以上の設定の下で、まず以下の命題を証明できる。

命題 4.3 (私有財産型の単純商品生産経済の性質 1)

私有財産型の単純商品生産経済において、生産価格比率と労働価値比率が一致するとき、各個人は搾取から中立的となる。

(証明)

前節と同様、このモデルにおいても各財の労働価値は (4.11) で与えられるので、労働価値比率は (4.18) となる。生産価格比率 p_1/p_2 がこの (4.18) と一致するならば、以下が成立する。

$$(4.23) \quad \frac{p_1(1-a_1)}{p_2 - p_1 a_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

この場合、個人 i の最適化問題の予算制約 (4.19) と等労働時間線 (4.21) の傾きが一致し、両制約条件を満たす領域が (ii) か (iii) のどちらであれ、個人 i の選択する生産点は (4.19) 上の点となる。ゆえに、個人 i の最小化された労働時間 L^i は以下を満たす。

$$\frac{L^i}{l_2} = \frac{p_1 b_1^i + p_2 b_2^i}{p_2 - p_1 a_2}$$

これに (4.23) を代入することで、個人 i の労働時間 L^i (=供給労働) は

$$L^i = \frac{b_1^i l_1 + b_2^i (l_2 + m)}{1 - a_1} \quad (m \equiv a_2 l_1 - a_1 l_2)$$

となる。他方、個人 i の取得労働は (4.11) より

$$\lambda_1 b_1^i + \lambda_2 b_2^i = \frac{b_1^i l_1 + b_2^i (l_2 + m)}{1 - a_1}$$

となる。以上より、生産価格比率と労働価値比率が一致するとき、すべての個人に関して供給労働と取得労働が等しくなり、無搾取な均衡が成立することが示された。 ■

∴ 私有財産型の単純商品生産経済においても、労働価値に基づく価格付けが成立するような特別な場合では、搾取なき経済が実現する

・命題 4.3 の「逆」、すなわち「私有財産型の単純商品生産経済において無搾取な均衡が成立しているとき、生産価格比率と労働価値比率は一致する」という命題は成立するか？

→ 一般には成立しない。以下、その具体例を提示する。

問題 4.2

以下のような具体例を考える。

- ・ 経済は個人 A と個人 B の 2 人で構成される
- ・ 投入係数は、 $a_1=0.5$, $a_2=0.5$, $l_1=1$, $l_2=2$
- ・ 個人 A の各財の消費量は、 $b_1^A=3$, $b_2^A=1$,
- ・ 個人 B の各財の消費量は、 $b_1^B=1$, $b_2^B=1$
- ・ 個人 A の資本財の期首賦与量は、 $K^A=4$
- ・ 個人 B の資本財の期首賦与量は、 $K^B=2$

このとき、 $p_1=4$, $p_2=5$ が均衡生産価格の 1 つとなり、その下で搾取中立的な均衡が成立するが、生産価格と労働価値は比例しないことを確認せよ。

・ただし、若干の仮定を付け加えれば、以下のように命題 4.3 の「逆」も成立することを示すことができる

命題 4.4 (私有財産型の単純商品生産経済の性質 2)

条件 (4.22) が厳密な不等号で成立する状況を想定しよう。

$$(4.24) \quad \frac{a_1 \sum_{i=1}^n b_1^i + a_2 \sum_{i=1}^n b_2^i}{1 - a_1} < \sum_{i=1}^n K^i$$

このとき、私有財産型の単純商品生産経済における無搾取均衡において、生産価格比率と労働価値比率は一致する

(証明)

(I) まず最初に、以下の (4.25) ないし (4.26) を満たす $(\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i)$ は、ある個人 h にとって無搾取均衡における実行可能な主体均衡解となっていることを示す。

$$(4.25) \quad \bar{x}_1^i = a_1 \bar{x}_1^i + a_2 \bar{x}_2^i + b_1^i, \quad \bar{x}_2^i = b_2^i$$

もしくは、((4.25) を解くことで得られる)

$$(4.26) \quad \bar{x}_1^i = \frac{b_1^i + a_2 b_2^i}{1 - a_1} (>0), \quad \bar{x}_2^i = b_2^i (>0)$$

・ (4.25) を集計すると各財の需給均衡条件 (4.16) となるので、(4.25) を満たす $(\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i)$ は各個人の実行可能な生産の組み合わせとなっている。

・ (4.25) の第 1 式 (第 2 式) に p_1 (p_2) を掛け、それらを集計することで以下を得る。

$$p_1(a_1 x_1^i + a_2 x_2^i) + p_1 b_1^i + p_2 b_2^i = p_1 x_1^i + p_2 x_2^i$$

これは、(4.25) を満たす $(\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i)$ が各個人の予算制約と整合的であることを意味する。

・ (4.26) より

$$a_1 \sum_{i=1}^n \bar{x}_1^i + a_2 \sum_{i=1}^n \bar{x}_2^i = \frac{a_1 \sum_{i=1}^n b_1^i + a_2 \sum_{i=1}^n b_2^i}{1 - a_1}$$

が成立するが、これと (4.24) より、以下を得る。

$$a_1 \sum_{i=1}^n \bar{x}_1^i + a_2 \sum_{i=1}^n \bar{x}_2^i < \sum_{i=1}^n K^i$$

これより、少なくともある個人 h について以下が成立する。

$$(4.27) \quad a_1 \bar{x}_1^h + a_2 \bar{x}_2^h < K^h$$

これは、ある個人 h に関して資本財制約がバインドしていないことを意味する。

・ (4.26) と (4.11) より、各個人の目的関数の値は

$$\begin{aligned} L^i (= l_1 \bar{x}_1^i + l_2 \bar{x}_2^i) &= l_1 \frac{b_1^i + a_2 b_2^i}{1 - a_1} + l_2 b_2^i = \frac{l_1}{1 - a_1} b_1^i + [l_2 + \frac{a_2}{1 - a_1} l_1] b_2^i \\ &= \lambda_1 b_1^i + \lambda_2 b_2^i \end{aligned}$$

これは、(4.26) を満たす $(\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i)$ は目的関数を最小にするような組み合わせであることを意味する。なぜなら、無撿取均衡において各個人の目的関数の最小値 (= 供給労働) は取得労働の大きさに一致しているはずだから。

以上より、ある個人 h にとって (4.25) ないし (4.26) を満たす $(\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i)$ は無撿取均衡における実行可能な主体均衡解となっていることが示された。

(II) 次に、(a) \bar{x}_1^i と \bar{x}_2^i が共に正 (←これは (4.26) より必ず成立する) で、かつ (b) 資本財制約がバインドしていない (← (4.27)) ような主体均衡解が成立するためには、生産価格比率が労働価値比率と一致していなければならないことを示す。

(a) と (b) を両方満足するような個人の制約領域を図示すると以下のようなになる。これらのどのケースについても、もし個人の予算制約 (4.19) と等労働時間線 (4.21) の傾きが異なれば (= 生産価格比率と労働価値比率が異なれば)、端点および両制約のフロンティアの交点が制約領域から排除されていることから、最適解が存在しなくなる。したがって、最適解が存在するためには、両者の傾きが一致 (= 生産価格比率と労働価値比率が一致) していなければならない。 ■

(図 4.4 : (a) と (b) を両方満足するような個人の制約領域)

∴ 命題 4.4 は、仮定 (4.24) を追加すれば、(問題 4.2 で示されているような「反例」を排除できるので) 無撿取均衡において生産価格と労働価値が比例することを示している。

<私有財産型の単純商品生産経済における撿取の存在>

- ・では、生産価格と労働価値が比例しないような均衡では撿取が生じるのだろうか？
→ 一般に生じうる。以下のように、そのような具体例を容易に作るができる。

問題 4.3

以下のような具体例を考える。

- ・ 経済は個人 A と個人 B の 2 人で構成される
- ・ 投入係数は、 $a_1=0.2$, $a_2=0.1$, $l_1=1$, $l_2=2$
- ・ 個人 A の各財の消費量は、 $b_1^A=8$, $b_2^A=2$,
- ・ 個人 B の各財の消費量は、 $b_1^B=2$, $b_2^B=2$
- ・ 個人 A の資本財の期首賦与量は、 $K^A=2$
- ・ 個人 B の資本財の期首賦与量は、 $K^B=1$

このとき、 $p_1=1$, $p_2=1$ が均衡生産価格の 1 つであること、その価格の下で生産価格と労働価値は比例しないこと、および均衡において搾取が生じることを確認せよ。

∴ 私有財産型の単純商品生産経済では、一般に搾取は生じる！（→ 無搾取均衡が成立すると断言できるのは生産価格と労働価値が比例する特殊な場合のみ）

→ この結果は、搾取を引き起こす根本要因が「労働市場の存在（＝労働力の商品化）」にあるのではなく「私有財産制度」にあることを示唆している！（※ マルクス経済学では伝統的に「資本家はその価値どおりに労働力商品を手に入れ、それを自分の監督下で自由に処分できること」が搾取発生の根本的原因と考えてきたが、理論上は自営業的経済でも搾取は生じるのである）

<国際不等価交換論への含意>

・ 私有財産型の単純商品生産経済とは、労働市場や資本財レンタル市場（＝資本市場）といたった生産要素市場が存在しない交換経済モデルのこと

→ 私有財産型の単純商品生産経済における各個人を「各国家」に見立てると、このモデルは労働や資本の国際移動が制限され、生産された財の取引のみが行われるような国際貿易モデルのように解釈できる

→ 上述の結論は、その国際貿易を通じて国家間の搾取が生じうることを示唆している

∴ この章の議論は、いわゆる「国際不等価交換論」とも密接に関係している

<第4章の問題の解答>

問題 4.1

各個人の制約条件を足し合わせ、かつ各個人の制約条件が等号で成立することを考慮すると、常に以下のワルラス法則が成立する。

$$p_1 \left[\sum_{i=1}^n (a_1 x_1^i + a_2 x_2^i) + \sum_{i=1}^n b_1^i - \sum_{i=1}^n x_1^i \right] + p_2 \left[\sum_{i=1}^n b_2^i - \sum_{i=1}^n x_2^i \right] = 0$$

したがって、(4.16) の2つの条件のうち片方が成立すれば、もう片方も必ず成立する。 ■

問題 4.2

この数値例の下で (4.11) を参考に各財の労働価値を計算すると

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3$$

したがってこの場合、生産価格比率と労働価値比率は一致しない。

各個人の最適化問題は以下のとおり

$$\text{(個人 A)} \quad \min_{\langle x_1^A, x_2^A \rangle} L^A = x_1^A + 2x_2^A \quad (\rightarrow \text{等労働時間線: } x_2^A = -\frac{1}{2}x_1^A + \frac{L^A}{2})$$

$$\text{s.t.} \quad x_2^A \geq -\frac{2}{3}x_1^A + \frac{17}{3}, \quad x_2^A \leq -x_1^A + 8$$

$$\text{(個人 B)} \quad \min_{\langle x_1^B, x_2^B \rangle} L^B = x_1^B + 2x_2^B \quad (\rightarrow \text{等労働時間線: } x_2^B = -\frac{1}{2}x_1^B + \frac{L^B}{2})$$

$$\text{s.t.} \quad x_2^B \geq -\frac{2}{3}x_1^B + 3, \quad x_2^B \leq -x_1^B + 4$$

これらを解くことで、各個人の最適な生産量は以下のとおり。

$$\text{(個人 A)} \quad x_1^A = 7, \quad x_2^A = 1 \quad \text{(個人 B)} \quad x_1^B = 3, \quad x_2^B = 1$$

この場合、各財の総生産量はそれぞれ

$$\sum_{i=A,B} x_1^i = 10, \quad \sum_{i=A,B} x_2^i = 2$$

となり、これらは財市場均衡条件 (4.16) を満たしていることを確認できる。

最後に、各個人の供給労働と取得労働を求めると

$$\text{(個人 A)} \quad \text{供給労働: } L^A = l_1 x_1^A + l_2 x_2^A = 1 \times 7 + 2 \times 1 = 9$$

$$\text{取得労働: } \lambda_1 b_1^A + \lambda_2 b_2^A = 2 \times 3 + 3 \times 1 = 9$$

$$\text{(個人 B)} \quad \text{供給労働: } L^B = l_1 x_1^B + l_2 x_2^B = 1 \times 3 + 2 \times 1 = 5$$

$$\text{取得労働: } \lambda_1 b_1^B + \lambda_2 b_2^B = 2 \times 1 + 3 \times 1 = 5$$

となり、両者とも供給労働と取得労働が一致することが分かる。

以上より、この経済では均衡において無撿取状態が成立するが、生産価格と労働価値は比例しないことが示された。 ■

問題 4.3

この数値例の下で (4.11) を参考に各財の労働価値を計算すると

$$\lambda_1 = 5/4, \quad \lambda_2 = 17/8$$

したがってこの場合、生産価格比率と労働価値比率は一致しない。

また、各個人の最適化問題は以下のとおり

$$\begin{aligned} \text{(個人 A)} \quad & \min_{\langle x_1^A, x_2^A \rangle} L^A = x_1^A + 2x_2^A \quad (\rightarrow \text{等労働時間線: } x_2^A = -\frac{1}{2}x_1^A + \frac{L^A}{2}) \\ \text{s.t.} \quad & x_2^A \geq -\frac{8}{9}x_1^A + \frac{100}{9}, \quad x_2^A \leq -2x_1^A + 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(個人 B)} \quad & \min_{\langle x_1^B, x_2^B \rangle} L^B = x_1^B + 2x_2^B \quad (\rightarrow \text{等労働時間線: } x_2^B = -\frac{1}{2}x_1^B + \frac{L^B}{2}) \\ \text{s.t.} \quad & x_2^B \geq -\frac{8}{9}x_1^B + \frac{40}{9}, \quad x_2^B \leq -2x_1^B + 10 \end{aligned}$$

これらを解くことで、各個人の最適な生産量は以下のとおり。

$$\text{(個人 A)} \quad x_1^A = 8, \quad x_2^A = 4 \quad \text{(個人 B)} \quad x_1^B = 5, \quad x_2^B = 0$$

この場合、各財の総生産量はそれぞれ

$$\sum_{i=A,B} x_1^i = 13, \quad \sum_{i=A,B} x_2^i = 4$$

となり、これらは財市場均衡条件 (4.16) を満たしていることを確認できる。

最後に、各個人の供給労働と取得労働を求めると

$$\text{(個人 A)} \quad \text{供給労働: } L^A = l_1 x_1^A + l_2 x_2^A = 1 \times 8 + 2 \times 4 = 16$$

$$\text{取得労働: } \lambda_1 b_1^A + \lambda_2 b_2^A = \frac{5}{4} \times 8 + \frac{17}{8} \times 2 = \frac{57}{4}$$

$$\text{(個人 B)} \quad \text{供給労働: } L^B = l_1 x_1^B + l_2 x_2^B = 1 \times 5 + 2 \times 0 = 5$$

$$\text{取得労働: } \lambda_1 b_1^B + \lambda_2 b_2^B = \frac{5}{4} \times 2 + \frac{17}{8} \times 2 = \frac{27}{4}$$

となり、資本労働比率の低い個人 A が被搾取者、資本労働比率の高い個人 B が搾取者となることが分かる (個人 A の資本労働比率は 0.125、個人 B のそれは 0.2)。

以上より、この経済では生産価格と労働価値は比例せず、均衡において搾取が生じていることが示された。 ■

第5章 富・階級・搾取の対応原理

- 5. 1 1部門階級生成モデル
- 5. 2 2部門階級生成モデル
- 5. 3 位相同型定理

<第5章の目的>

第2章や第3章では資本家と労働者が最初から決まっているような経済を想定したが、この章ではどのような個人がどのような階級に属するようになるのかという階級生成の問題に焦点をあて、賦与された富が大きい（小さい）個人ほど、雇用する（雇用される）立場となって搾取する（搾取される）ことを明らかにする。また、生産要素市場が労働市場のみのモデルと資本市場のみのモデルを比較し、両方で階級の生成や搾取のあり方が一致すること（＝階級の生成や搾取を生み出す主要因は労働市場の存在ではなく私有財産制度にあること）を示す。

5. 1 1部門階級生成モデル

目的：1部門モデルを用いて富・階級・搾取の対応原理を明らかにする

<生産技術>

- ・経済には1種類の生産要素（＝労働）と1種類の財（＝例えば小麦）が存在する。財は資本財としても消費財としても利用できる。
- ・1単位の財を生産するのに、 a 単位の財と、 l 単位の労働の投入が必要。すべての個人がこの生産技術に無料でアクセス可能。

（表 5.1：1部門モデルの投入係数）

	財
財	a
労働	l

- ・財の労働価値を λ とおくと、 λ は以下のようなになる。

$$(5.1) \quad \lambda = a\lambda + l \rightarrow \lambda = \frac{l}{1-a}$$

- ・均衡における財の価格を p 、名目賃金を1（←名目賃金を価値尺度とする）、利潤率を r とおき、「賃金後払い」を想定すると、利潤率および価格方程式は以下のとおり

$$(5.2) \quad r = \frac{p - (pa + l)}{pa}, \quad p = (1 + r)pa + l$$

(※ 賃金前払いと賃金後払いの違いについては第 3 章を参照せよ)

<個人の最適化行動>

- 個人 i は期首に K^i 単位の財と 1 単位の労働が賦与されている
 - 労働の所有量は個人間で平等だが、財の所有量は個人間で不平等
- 経済には労働市場は存在するが、資本市場は存在しない (逆のケースを 5.3 節で検討)
 - 生産開始前に資本財の調達資金を貸し借りをすることはできない
- 個人 i は

- (1) 自分の財と自分の労働を用いて生産できる財の量 x^i からの収入
- (2) 自分の財と他人の労働を用いて生産できる財の量 y^i からの収入
- (3) 自分の労働を z^i だけ他人に売ることによって得られる収入

の合計が最大になるように (x^i, y^i, z^i) を選択する。すなわち彼の所得最大化問題を定式化すると…

$$(5.3) \quad \max_{\langle x^i, y^i, z^i \rangle} \Pi^i = p(1-a)x^i + [p - (pa + l)]y^i + z^i$$

$$\text{s.t.} \quad a(x^i + y^i) \leq K^i, \quad lx^i + z^i \leq 1$$

(※ ここで Π^i は、粗収入 $px^i + (p-l)y^i + z^i$ から、「補填投資分」すなわち定常的な単純再生産が可能となるように来期に持ち越す財の価額 $pa(x^i + y^i)$ を差し引いた残り、と定義されている点に注意)

この問題は目的関数と制約条件が共に線形なので、内点解が一意に定まるような標準的な問題ではないが、以下のような議論を通じて、この問題の解がとりうる「パターン」をある程度絞り込むことができる

- 以下では、問題 (5.3) の解が仮に $x^i > 0$, $y^i > 0$, $z^i = 0$ となるとき、それを $(+, +, 0)$ と表記する

→ したがって、解がとりうるパターンをすべて列挙すると、以下の 8 通り

$$\begin{array}{cccc} (0, 0, 0) & (+, 0, 0) & (0, +, 0) & (0, 0, +) \\ (+, +, 0) & (+, 0, +) & (0, +, +) & (+, +, +) \end{array}$$

- このうち、 $(0, 0, 0)$ と $(0, +, 0)$ が解になり得ないことは明らか。なぜならこの 2 つでは個人が所有する労働が未使用となっているが、それは所得最大化に反するから。

- また、 $(0, +, +)$ と $(+, +, +)$ の 2 つも解の候補から除外できる (この 2 つは個人

が雇用者であると同時に被雇用者でもある状況に相当する)。その証明は以下のとおり。

(証明)

問題 (5.3) の解を (x^i, y^i, z^i) と表記しよう。この解が $(0, +, +)$ もしくは $(+, +, +)$ の場合、言い換えると $y^i > 0$ かつ $z^i > 0$ の場合、 $(x^i + e, y^i - e, z^i - le)$ という解も、制約条件を満たしつつ同じ所得をもたらす。なぜなら…

$$\begin{aligned}\Pi^i(e) &= p(1-a)(x^i + e) + [p - (pa + l)](y^i - e) + z^i - le \\ &= p(1-a)x^i + [p - (pa + l)]y^i + z^i \\ &= \Pi^i\end{aligned}$$

$$a[(x^i + e) + (y^i - e)] = a(x^i + y^i) \leq K^i$$

$$l(x^i + e) + z^i - le = lx^i + z^i \leq 1$$

ここで…

(a) $e = y^i$ とおき、 $z^i - ly^i > 0$ の場合、 $(x^i + y^i, 0, z^i - ly^i)$ 、すなわち $(+, 0, +)$ もこの問題の解となる

(b) $e = y^i$ とおき、 $z^i - ly^i = 0$ の場合、 $(x^i + y^i, 0, 0)$ 、すなわち $(+, 0, 0)$ もこの問題の解となる

(c) $e = y^i$ とおき、 $z^i - ly^i < 0$ の場合、 e を新しく $e = z^i / l$ とおき直すと、 $(x^i + z^i / l, y^i - z^i / l, 0)$ 、すなわち $(+, +, 0)$ もこの問題の解となる

以上より、問題 (5.3) の解が $(0, +, +)$ か $(+, +, +)$ の場合、その解を $(+, 0, +)$ 、 $(+, 0, 0)$ 、 $(+, +, 0)$ のいずれかに書き換え可能であることが示された。 ■

∴ 以上より、問題 (5.3) の解がとりうるパターンを以下の 4 つに絞ることができる

$(+, +, 0)$: 自営すると共に、他人を雇用して生産活動を行う『ブルジョア階級』

$(+, 0, 0)$: 賦与された財と労働で自営する『独立自営階級』

$(+, 0, +)$: 自営すると共に、他人に雇用される形で働く『準プロレタリア階級』

$(0, 0, +)$: 他人に雇用される形で働く『プロレタリア階級』

・個人 i の属する階級が上の 4 つのどれであれ、彼の最大化された所得 Π^i は

$$(5.4) \quad \Pi^i = rpK^i + 1$$

となる (したがって所得 Π^i は財の賦与量 K^i の単調増加関数)。証明は以下のとおり。

(証明)

問題 (5.3) の解を (x^i, y^i, z^i) とすると、

$$\bar{x}^i = 0, \quad \bar{y}^i = x^i + y^i, \quad \bar{z}^i = z^i + lx^i$$

と定義される $(\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{z}^i)$ も制約条件を満たしつつ解 (x^i, y^i, z^i) と同じ所得をもたらす。なぜなら…

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}^i &= p(1-a)\bar{x}^i + [p - (pa+l)]\bar{y}^i + \bar{z}^i \\
&= [p - (pa+l)](x^i + y^i) + z^i + lx^i \\
&= p(1-a)x^i + [p - (pa+l)]y^i + z^i \\
&= \Pi^i \\
a(\bar{x}^i + \bar{y}^i) &= a(x^i + y^i) \leq K^i \\
l\bar{x}^i + \bar{z}^i &= lx^i + z^i \leq 1
\end{aligned}$$

ところで、所得最大化のためには以下のように各制約条件が等号で成立しなければならぬ（さもないと所得をさらに引き上げる余地が存在するから）。

$$a(x^i + y^i) (= a\bar{y}^i) = K^i, \quad lx^i + z^i (= \bar{z}^i) = 1$$

以上より、個人*i*の最大化された所得 Π^i は

$$\begin{aligned}
\Pi^i (= \bar{\Pi}^i) &= [p - (pa+l)]\bar{y}^i + \bar{z}^i \\
&= \frac{p - (pa+l)}{pa} \times pa\bar{y}^i + \bar{z}^i \\
&= rpK^i + 1
\end{aligned}$$

となる。 ■

<富と階級の対応関係>

何が各個人の属する階級を規定するのか？

→ その規定因が「財の賦与量 K^i 」であることを以下のように示すことができる

(1) 財と労働の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$ax^i < K^i, \quad lx^i = 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.5) \quad a/l < K^i$$

が成立する場合、自営業的に生産するだけでは財を使い切れないので、さらに他人を雇って生産活動を行うことになる → (+, +, 0)

∴ 財の賦与量が (5.5) を満たす場合、個人*i*は『ブルジョア階級』に属する

(2) 財と労働の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$ax^i = K^i, \quad lx^i = 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.6) \quad a/l = K^i$$

が成立する場合、自営業的に生産することで賦与された財と労働とちょうど使い切る形になる → (+, 0, 0)

∴ 財の賦与量が (5.6) を満たす場合、個人*i*は『独立自営階級』に属する

(3) 財と労働の賦与量($K^i, 1$)に対して

$$ax^i = K^i, \quad lx^i < 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.7) \quad a/l > K^i$$

が成立する場合、賦与された財をすべて自営業的生産に投下してもまだ労働が余るので、他人に自らの労働を供給して所得を増やす $\rightarrow (+, 0, +)$

なお、財を一切持たない ($K^i = 0$) のような個人も (5.7) で示される範囲に含まれるが、彼の解のパターンは $(0, 0, +)$

\therefore 財の賦与量が (5.7) を満たす場合、個人 i は『準プロレタリア階級』か『プロレタリア階級』に属する

以上の結果を要約すると…

命題 5.1 (1 部門階級生成モデルにおける富と階級の対応関係)

個人 i が所有する (労働 1 単位あたりの) 財の量 K^i と、所得最大化行動の結果として彼が所属することになる階級との間には、以下の関係が成立する。

$a/l < K^i$ のとき、『ブルジョア階級』

$a/l = K^i$ のとき、『独立自営階級』

$a/l > K^i$ のとき、『準プロレタリア階級』もしくは『プロレタリア階級』

<階級と搾取の対応関係>

・個人 i の最大化された所得は (5.4) で与えられるので、彼の「取得労働」、すなわち所得で購入できる財の労働価値は以下のとおり。

$$\lambda \times \frac{\Pi^i}{p} = \frac{\lambda(rpK^i + 1)}{p}$$

他方、すべての個人は 1 単位の労働を供給する (=「供給労働」が 1) なので、このモデルにおける搾取関係を以下のように定義できる

定義 (1 部門階級生成モデルにおける搾取の定義)

以下の条件が成立するとき、個人 i は被搾取者と定義される。

$$(5.8) \quad \frac{\lambda(rpK^i + 1)}{p} < 1$$

・この定義 (5.8) を書き直すと…

$$\frac{p-\lambda}{pr\lambda} > K^i$$

ここで、(5.1) と (5.2) より以下が成立することを容易に示すことができる

$$\frac{p-\lambda}{pr\lambda} = \frac{a}{l}$$

したがって、 $a/l > K^i$ であるような個人 i は被搾取者となるが、命題 5.1 よりそのような個人は『準プロレタリア』もしくは『プロレタリア』に属している（他の階級に属する個人についても同様に議論できる）。以上を要約すると…

命題 5.2 (1 部門階級生成モデルにおける富・階級・搾取の対応原理)

個人 i が所有する（労働 1 単位あたりの）財の量 K^i と、所得最大化行動の結果として彼が所属する階級と、搾取のあり方との間には、以下の関係が成立する。

- (I) $a/l < K^i$ のとき、個人 i は『ブルジョア階級』に属し、搾取者となる
- (II) $a/l = K^i$ のとき、個人 i は『独立自営階級』に属し、搾取から中立的となる
- (III) $a/l > K^i$ のとき、個人 i は『準プロレタリア』もしくは『プロレタリア』に属し、被搾取者となる

5. 2 2 部門階級生成モデル

目的：2 部門モデルを用いて富・階級・搾取の対応原理を明らかにする

<生産技術>

- ・財 1 (= 万能資本財) と財 2 (= 消費財) が生産される 2 部門モデルを想定する
- ・万能資本財とは、資本財としても消費財としても利用できる財のこと
(→ 以下、万能資本財を単に資本財と呼ぶことにする)
- ・生産技術の想定は今までの基本モデルと同じ。再掲すると…

	財 1 (万能資本財)	財 2 (消費財)
財 1 (万能資本財)	a_1	a_2
財 2 (消費財)	0	0
労働	l_1	l_2

- ・財 1 (財 2) の労働価値を λ_1 (λ_2) とおくと、それらの値は以下のとおり

$$(5.9) \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{1-a_1}, \quad \lambda_2 = l_2 + \frac{a_2}{1-a_1} l_1$$

- ・均衡における財 1 (財 2) の価格を p_1 (p_2)、名目賃金を 1 (←名目賃金を価値尺度とす

る)、均等利潤率を r とし、「賃金後払い」を想定すると、均等利潤率と価格方程式は以下のとおり

$$(5.10) \quad r = \frac{p_1 - (p_1 a_1 + l_1)}{p_1 a_1} = \frac{p_2 - (p_1 a_2 + l_2)}{p_1 a_2}$$

$$p_1 = (1+r)p_1 a_1 + l_1, \quad p_2 = (1+r)p_1 a_2 + l_2$$

(※ 賃金前払いと賃金後払いの違いについては第 3 章を参照せよ)

問題 5.1

以下のように記号を定める。

$$p = (p_1, p_2), \quad L = (l_1, l_2), \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これらを用いて、(5.10) の価格方程式を行列表示で表せ。

<個人の最適化行動>

- ・個人 i は、資本財（財 1）を K^i 単位、労働を 1 単位、賦与されている
 - 労働の所有量は個人間で平等だが、資本財の所有量は個人間で不平等
- ・経済には労働市場は存在するが、資本財市場は存在しない
 - 生産開始前に資本財の調達資金を貸し借りすることはできない
- ・個人 i は

(1) 自分の資本財と自分の労働で生産できる各財の組み合わせ: $x^i = (x_1^i, x_2^i)^T$ を売ること
で得られる収入 (※ x^i は 2×1 の列ベクトル、添え字の T は「転置」を意味する)

(2) 自分の資本財と他人の労働で生産できる各財の組み合わせ: $y^i = (y_1^i, y_2^i)^T$ を売ること
で得られる収入 (※ y^i は 2×1 の列ベクトル)

(3) 自分の労働を z^i だけ他人に売ること得られる収入 (※ z^i はスカラー)

の合計が最大になるように (x^i, y^i, z^i) を選択するものとする。したがって、彼の所得最大化問題をベクトル・行列を用いずに表現すると…

$$(5.11) \quad \max_{\langle x^i, y^i, z^i \rangle} \Pi^i = [p_1 x_1^i + p_2 x_2^i - p_1 (a_1 x_1^i + a_2 x_2^i)]$$

$$+ [p_1 y_1^i + p_2 y_2^i - p_1 (a_1 y_1^i + a_2 y_2^i) - (l_1 y_1^i + l_2 y_2^i)] + z^i$$

$$\text{s.t.} \quad a_1 x_1^i + a_2 x_2^i + a_1 y_1^i + a_2 y_2^i \leq K^i, \quad l_1 x_1^i + l_2 x_2^i + z^i \leq 1$$

(※ 前節と同様、 Π^i は粗収入から「補填投資分」すなわち定常的な単純再生産が可能となるように来期に持ち越す財の価額を差し引いた残り、と定義されている点に注意)

問題 5.2

以下のように記号を定める。

$$x^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix}, \quad y^i = \begin{pmatrix} y_1^i \\ y_2^i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = (p_1, p_2), \quad L = (l_1, l_2), \quad \omega^i = \begin{pmatrix} K^i \\ 0 \end{pmatrix}$$

これらを用いて、上の利潤最大化問題を行列表示で表せ。

・前節と同様の手順で、この問題の解がとりうるパターンを絞ることが可能

以下では、問題 (5.11) の解が仮に $x^i \geq 0$, $y^i \geq 0$, $z^i = 0$ となるとき、(+, +, 0) と表記する (※ ここで、同じ次数の 2 つのベクトル a と b に対して $a \geq b$ が成立するとは、両ベクトルのすべての成分について $a_i \geq b_i$ が成立し、かつある成分について $a_i > b_i$ が成立することを意味する。)

→ したがって、解がとりうるパターンをすべて列挙すると、以下の 8 通り

$$\begin{array}{cccc} (0, 0, 0) & (+, 0, 0) & (0, +, 0) & (0, 0, +) \\ (+, +, 0) & (+, 0, +) & (0, +, +) & (+, +, +) \end{array}$$

・このうち、(0, 0, 0) と (0, +, 0) が解になり得ないことは明らか。なぜならこの 2 つは個人が所有する労働が未使用となっており、それは所得最大化に反するから。

・また、(0, +, +) と (+, +, +) の 2 つも解の候補から除外できる (→ この 2 つは、この個人が雇用者であると同じに被雇用者でもあるような状況に相当している)。

問題 5.3

(0, +, +) と (+, +, +) の 2 つを解の候補から除外できることを証明せよ。

∴ 以上より、問題 (5.11) の解がとりうるパターンは以下の 4 つに絞られる

(+, +, 0) : 自営すると共に、他人を雇用して生産活動を行う『ブルジョア階級』

(+, 0, 0) : 賦与された資本財と労働で自営する『独立自営階級』

(+, 0, +) : 自営すると共に、他人に雇用される形で働く『準プロレタリア階級』

(0, 0, +) : 他人に雇用される形で働く『プロレタリア階級』

・個人 i の属する階級が上の 4 つのどれであれ、彼の最大化された所得 Π^i は

$$(5.12) \quad \Pi^i = rp_1 K^i + 1$$

となる

問題 5.4

個人 i の最大化された所得 Π^i が (5.12) のように表わせることを証明せよ。

<富と階級の対応関係>

資本財の賦与量 K^i の大きさに応じて所属階級が決まることを明らかにする

・とりあえず、以下を想定して議論を進める（逆の場合も同様に議論できる）

$$(5.13) \quad a_1/l_1 > a_2/l_2$$

ここで、 a_1/l_1 は資本財（財 1）部門の資本集約度、 a_2/l_2 は消費財（財 2）部門の資本集約度を意味する。（※ 資本集約度とは労働 1 単位あたり投入する資本財の量のこと）

(1) 資本財と労働の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$a_1x_1^i < K^i, \quad l_1x_1^i = 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.14) \quad a_1/l_1 < K^i$$

が成立する場合、より資本集約的な財 1 の生産に特化する形で自営しても資本財が余るので、さらに他人を雇って生産活動を行うことになる $\rightarrow (+, +, 0)$

∴ 資本財の賦与量が (5.14) を満たす場合、個人 i は『ブルジョア階級』に属する

(2) 資本財と労働時間の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$a_1x_1^i = K^i, \quad l_1x_1^i = 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.15) \quad a_1/l_1 = K^i$$

が成立する場合、より資本集約的な財 1 の生産に特化する形で自営すると賦与された資本財と労働をちょうど使い切る $\rightarrow (+, 0, 0)$

∴ 資本財の賦与量が (5.15) を満たす場合、個人 i は『独立自営階級』に属する

(※ この場合、労働集約的な財 2 の生産に特化する形で自営すると資本財が余るので、その残りで他人の労働を雇うこともできるが、そうすることで彼の所得 Π^i は変わらないので、この場合は独立自営を選ぶものと仮定する。この点については以下も同様)

(3) 資本財と労働の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$a_1x_1^i + a_2x_2^i = K^i, \quad l_1x_1^i + l_2x_2^i = 1$$

が成立する場合、

$$K^i = \frac{a_1x_1^i + a_2x_2^i}{l_1x_1^i + l_2x_2^i} = \frac{l_1x_1^i}{l_1x_1^i + l_2x_2^i} \times \frac{a_1}{l_1} + \frac{l_2x_2^i}{l_1x_1^i + l_2x_2^i} \times \frac{a_2}{l_2}$$

より、以下が成立する。

$$(5.16) \quad a_2/l_2 < K^i < a_1/l_1$$

この場合、両財を生産する形で自営すると、資本財と労働の賦与量をちょうど使い切る $\rightarrow (+, 0, 0)$

∴ 資本財の賦与量が (5.16) を満たす場合、個人 i は『独立自営階級』に属する

(4) 資本財と労働の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$a_2 x_2^i = K^i, \quad l_2 x_2^i = 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.17) \quad a_2 / l_2 = K^i$$

が成立する場合、より労働集約的な財 2 の生産に特化する形で自営すると、資本財と労働の賦与量をちょうど使い切る $\rightarrow (+, 0, 0)$

∴ 資本財の賦与量が (5.17) を満たす場合、個人 i は『独立自営階級』に属する

(5) 与えられた資本財と労働の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$a_2 x_2^i = K^i, \quad l_2 x_2^i < 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.18) \quad K^i < a_2 / l_2$$

が成立する場合、より労働集約的な財 2 の生産に特化する形で自営しても労働が余るので、その余りを他人に売ること賃金を稼ぐことになる $\rightarrow (+, 0, +)$

∴ 資本財の賦与量が (5.18) を満たす場合、個人 i は『準プロレタリア階級』に属する

(※ なお、『プロレタリア階級』に属する $K^i = 0$ の個人もこの領域に区分される)

∴ 以上を要約すると…

$a_1 / l_1 < K^i$ のとき、個人 i は『ブルジョア階級』に所属

$a_2 / l_2 \leq K^i \leq a_1 / l_1$ のとき、個人 i は『独立自営階級』に所属

$K^i < a_2 / l_2$ のとき、個人 i は『準プロレタリア階級』 or 『プロレタリア階級』に所属

・ここまで、2つの部門の資本集約度に関して (5.13) を想定して議論してきたが、その逆 ($a_1 / l_1 < a_2 / l_2$) の場合に関しても同様の議論を通じて以下の結果を導ける

$a_2 / l_2 < K^i$ のとき、『ブルジョア階級』

$a_1 / l_1 \leq K^i \leq a_2 / l_2$ のとき、『独立自営階級』

$K^i < a_1 / l_1$ のとき、『準プロレタリア階級』 or 『プロレタリア階級』

以上の結果を統合すると…

命題 5.3 (2部門階級生成モデルにおける富と階級の対応関係)

個人 i が所有する (労働 1 単位あたりの) 資本財の量 K^i と、所得最大化行動の結果として彼が所属することになる階級との間には、以下の関係が成立する。

$(a/l)^{\max} < K^i$ のとき、『ブルジョア階級』

$(a/l)^{\min} \leq K^i \leq (a/l)^{\max}$ のとき、『独立自営階級』

$K^i < (a/l)^{\min}$ のとき、『準プロレタリア階級』または『プロレタリア階級』

ここで、 $(a/l)^{\max} = \max[a_1/l_1, a_2/l_2]$ 、 $(a/l)^{\min} = \min[a_1/l_1, a_2/l_2]$ を意味する。

<階級と搾取の対応関係>

・個人*i*の最大化された所得は (5.12) で与えられるので、その所得のすべてを財 1 (財 2) の購入に充てた場合、彼が受け取る「取得労働」は以下ようになる

$$\text{財 1 のみを購入した場合の取得労働} = \frac{\lambda_1}{p_1} \times (rp_1 K^i + 1)$$

$$\text{財 2 のみを購入した場合の取得労働} = \frac{\lambda_2}{p_2} \times (rp_1 K^i + 1)$$

・他方、すべての個人は 1 単位の労働を供給する (=「供給労働」が 1) なので、取得労働がより高くなる方の財の購入に全所得を投じてもお取得労働が供給労働を下回る場合、その個人は搾取されていると考えることができる。したがって…

定義 (2 部門階級生成モデルにおける搾取の定義)

以下の条件が成立するとき、個人*i*は被搾取者 (または搾取者) と定義される。

$$(5.19.a) \quad (\lambda/p)^{\max} \times (rp_1 K^i + 1) < 1 \quad \rightarrow \quad \text{個人 } i \text{ は被搾取者}$$

$$(5.19.b) \quad (\lambda/p)^{\min} \times (rp_1 K^i + 1) > 1 \quad \rightarrow \quad \text{個人 } i \text{ は搾取者}$$

ここで、 $(\lambda/p)^{\max} = \max[\lambda_1/p_1, \lambda_2/p_2]$ 、 $(\lambda/p)^{\min} = \min[\lambda_1/p_1, \lambda_2/p_2]$ である。

このとき、以下の命題を証明できる。

命題 5.4 (2 部門階級生成モデルにおける富・階級・搾取の対応原理)

個人*i*が所有する (労働 1 単位あたりの) 資本財の量 K^i と、所得最大化行動の結果として彼が所属する階級と、搾取のあり方との間には、以下の関係が成立する。

(I) $K^i < (a/l)^{\min}$ のとき、個人*i*は『準プロレタリア』もしくは『プロレタリア』に属し、被搾取者となる

(II) $(a/l)^{\max} < K^i$ のとき、個人*i*は『ブルジョア階級』に属し、搾取者となる

(※)『独立自営階級』に属する個人の搾取のあり方は確定しない (=搾取される場合もあり、搾取する場合もあり、搾取中立的となる場合もある)。

(証明)

まず、(I) を証明する。

(5.19.a) は次のように変形できる

$$K^i < \frac{1 - (\lambda/p)^{\max}}{rp_1(\lambda/p)^{\max}}$$

したがって

$$(5.20) \quad (a/l)^{\min} \leq \frac{1 - (\lambda/p)^{\max}}{rp_1(\lambda/p)^{\max}}$$

を証明すれば (I) を証明したことになる。この目的のためにその逆：

$$(5.21) \quad (a/l)^{\min} > \frac{1 - (\lambda/p)^{\max}}{rp_1(\lambda/p)^{\max}}$$

を仮定し、この仮定の下で矛盾が生じることを示す。

(5.21) を展開することで以下を得る。

$$\min \left[\frac{rp_1 a_1 + l_1}{l_1}, \frac{rp_1 a_2 + l_2}{l_2} \right] \times (\lambda/p)^{\max} > 1$$

これに (5.10) の価格方程式を代入することで以下を得る。

$$\min \left[\frac{p_1(1-a_1)}{l_1}, \frac{p_2 - p_1 a_2}{l_2} \right] \times (\lambda/p)^{\max} > 1$$

これはすなわち、次が成立することを意味する。

$$(5.22) \quad \frac{p_1(1-a_1)}{l_1} \times (\lambda/p)^{\max} > 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{p_2 - p_1 a_2}{l_2} \times (\lambda/p)^{\max} > 1$$

以下では、(i) $(\lambda/p)^{\max} = \lambda_1/p_1$ の場合と、(ii) $(\lambda/p)^{\max} = \lambda_2/p_2$ の場合のいずれのケースにおいても (5.22) が成立しないことを示す。

(i) $(\lambda/p)^{\max} = \lambda_1/p_1$ の場合

この場合、(5.9) を用いることで (5.22) の第1式は

$$\frac{p_1(1-a_1)}{l_1} \times \frac{\lambda_1}{p_1} = 1 > 1$$

となり、矛盾が生じる。

(ii) $(\lambda/p)^{\max} = \lambda_2/p_2$ の場合

この場合、(5.9) を用いることで (5.22) の第2式の左辺は

$$\frac{p_2 - p_1 a_2}{l_2} \times \frac{\lambda_2}{p_2} = \frac{p_2 - p_1 a_2}{p_2} \times \frac{\lambda_2}{l_2} = \frac{1 - a_2(p_1/p_2)}{1 - a_2(\lambda_1/\lambda_2)}$$

となるが、仮定よりこの場合は $\lambda_1/p_1 < \lambda_2/p_2$ であり、ゆえに $\frac{1 - a_2(p_1/p_2)}{1 - a_2(\lambda_1/\lambda_2)}$ の値は 1 よりも小さくなるので、矛盾が生じる。

以上より、(5.21) を仮定すると矛盾が生じることが示されたので、(5.20) が成立するこ

と (= (I) が成立すること) を証明できた。

なお、(II) の方もこれと同じ方法で証明できる。 ■

<対応原理が成立しないケース>

対応原理が成立しない例として、以下のようなケースがある

① 各個人の「労働供給の富弾力性 (=所有する富が 1%増加したとき、供給する労働時間が何%変化するか)」が 1 よりも大きいとき、富の所有量の大きい個人が小さい個人に雇用され、搾取されるという結果が生じうる

② 各個人の富の所有量が同じでも、個人間の時間選好に違いがあれば、時間選好率の大きい (=貯蓄意欲の小さい) 個人が時間選好率の小さい (=貯蓄意欲の大きい) に雇用され、搾取されるという結果が生じうる

→ これらのケースにおいて (取得労働と供給労働の比較に基づく) 労働搾取概念は、所得分配の公正性を測るための妥当な指標とは言い難いものとなる

<結合生産モデルにおける対応原理の頑健性について>

・レオンチェフ型のモデルを結合生産モデル (第 1 章の 1.4 節を参照) へと拡張しても「富・階級・搾取の対応原理」は成立するのか?

→ 富と階級の関係 (=命題 5.3) は成立する。しかし、(結合生産モデルにおける標準的な労働価値の定義である) 森嶋型の定義の下では、もはや階級と搾取の関係 (=命題 5.4) は成立しなくなる。

∴ 結合生産モデルにおいて階級と搾取の対応関係を成立させるためには、労働価値の定義を修正しなければならない

・森嶋型の定義に従えば、財 1 の労働価値とは「財 1 を 1 単位以上純生産するのに必要な最小の労働時間」を意味する。これを、「均等利潤率が最大になるような均衡生産価格の下で、財 1 を 1 単位以上純生産するのに必要な最小の労働時間」(← これは均衡において資本家が採用するような工程を用いて財 1 を 1 単位純生産する場合の最小労働時間を意味する) と新たに定義し直せば、結合生産モデルの下でも階級と搾取の対応関係が成立する¹¹

→ この場合、労働価値は生産技術の構造だけでなく生産価格にも依存することになる。伝統的マルクス経済学では労働価値は生産価格に先行する概念と見なされていたが、その立場に固執する限り、より一般的なモデルの下でマルクス経済学の主要命題は成立しなくなるのである。

¹¹ このように、レオンチェフ型のモデルを超えてより一般的な理論的枠組みの下で数理マルクス経済学の主要命題を成立させるためには、労働価値の定義の変更を余儀なくされる。吉原 (2008) はこの点に関する最近までの研究の到達点を厳密かつ系統的に論じている。

5.3 位相同型定理

ここまで、生産要素市場として労働市場のみが存在し、資本市場（＝生産開始前に資本財の調達資金を貸し借りする市場）は存在しない経済を想定してきた。

→ 逆のケース、すなわち資本市場のみが存在し、労働市場が存在しない経済では、得られる結果は変わるのか？

→ 結論を述べると、完全競争下では「資本が労働を雇う世界」と「労働が資本を雇う世界」は、富・階級・搾取の対応関係に関して同じ結果が成立する（＝「位相同型定理」）

以下、この点を 5.1 節の 1 部門モデルを用いて確認する

<モデルの設定と主要命題>

- ・生産技術（投入係数）は 5.1 節の 1 部門モデルと同じ
 - 財の労働価値は (5.1) で与えられる
- ・5.1 節と同様、個人 i は K^i 単位の財と 1 単位の労働を賦与されている
 - 労働の保有量は個人間で平等だが、財の保有量は個人間で不平等
- ・経済には資本市場は存在するが、労働市場は存在しない
 - 資本市場では名目利子率 R で資金の貸し借りが可能。
他方、労働力を市場で売買することはできず、各人は自営業的に働くしかない

・個人 i は

- (1) 自分の労働と自分の財から生産される財の量 x^i からの収入
 - (2) y^i だけの量の財を（お金の形で）他人に貸し付けることで得られる収入
 - (3) 自分の労働と（借金で購入した）他人の財から生産される財の量 z^i からの収入
- の合計が最大になるように (x^i, y^i, z^i) を選択する。すなわち彼の所得最大化問題を定式化すると…

$$(5.23) \quad \max_{\langle x^i, y^i, z^i \rangle} \Pi^i = p(1-a)x^i + Rpy^i + [p - (1+R)pa]z^i$$

$$\text{s.t.} \quad ax^i + y^i \leq K^i, \quad l(x^i + z^i) \leq 1$$

(※ 以前と同様、 Π^i は粗収入 $px^i + (1+R)py^i + [p - (1+R)pa]z^i$ から、「補填投資分」すなわち定常的な単純再生産が可能となるように来期に持ち越す財の価額 $p(ax^i + y^i)$ を差し引いた残り、と定義されている点に注意)

・問題 (5.23) の解がとりうるパターンを以下のように命名する

(+, +, 0) : 賦与された財と労働で自営するだけでなく、他人に財を貸し付けることで収入を得る『金融的ブルジョア階級』

(+, 0, 0) : 賦与された財と労働で自営する『独立自営階級』

(+, 0, +) : 賦与された財と労働で自営するだけでなく、他人から借金して購入した財を用いてさらに自営する『金融的準プロレタリア階級』

(0, 0, +) : 他人から借金して購入した財で自営する『金融的プロレタリア階級』

このとき、以下が成立する

命題 5.5 (位相同型定理)

個人 i が所有する (労働 1 単位あたりの) 財の量 K^i と、所得最大化行動の結果として彼が所属する階級と、搾取のあり方との間には、以下の関係が成立する。

(I) $a/l < K^i$ のとき、個人 i は『金融的ブルジョア階級』に属し、搾取者となる

(II) $a/l = K^i$ のとき、個人 i は『独立自営階級』に属し、搾取から中立的となる

(III) $a/l > K^i$ のとき、個人 i は『金融的準プロレタリア階級』もしくは『金融的プロレタリア階級』に属し、被搾取者となる

問題 5.5

命題 5.5 を証明せよ。

∴ 完全競争的環境を想定する限り、「資本が労働を雇う世界」と「労働が資本を雇う世界」では、階級や搾取の生成パターンに関して違いはない。雇用契約を結ぶタイプの経済であれ、自営業的に働くタイプの経済であれ、共通するのは (労働 1 単位あたりの) 資本財の所有量、すなわち資本・労働比率が小さい個人が搾取されるという点。

→ 搾取の起源を「労働力の商品化」に見出す考え方は、必ずしも説得的ではない。むしろ資本財 (= 生産手段) の私的所有制度およびその不均等な分布こそ、搾取が生じる最も根本的要因と考えることができる。

<第5章の問題の解答>

問題 5.1

$$p = (1+r)pA + L \quad \blacksquare$$

問題 5.2

$$\begin{aligned} \max_{\langle x^i, y^i, z^i \rangle} \quad & \Pi^i = (px^i - pAx^i) + (py^i - pAy^i - Ly^i) + z^i \\ \text{s.t.} \quad & pAx^i + pAy^i \leq p\omega^i, \quad Lx^i + z^i \leq 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

問題 5.3

問題 (5.11) の解を (x^i, y^i, z^i) と表記しよう。この解が $(0, +, +)$ もしくは $(+, +, +)$ の場合、言い換えると $y^i \geq 0$ かつ $z^i > 0$ の場合、 $(x^i + e, y^i - e, z^i - Le)$ という解も、制約条件を満たしつつ同じ所得をもたらす (ここで e は 2×1 のベクトルで、 $e \geq 0$ を満たす)。なぜなら…

$$\begin{aligned} \Pi^i(e) &= [p(x^i + e) - pA(x^i + e)] + [p(y^i - e) - pA(y^i - e) - L(y^i - e)] + z^i - Le \\ &= (px^i - pAx^i) + (py^i - pAy^i - Ly^i) + z^i \\ &= \Pi^i \end{aligned}$$

$$pA(x^i + e) + pA(y^i - e) = pAx^i + pAy^i \leq p\omega^i$$

$$L(x^i + e) + z^i - Le = Lx^i + z^i \leq 1$$

ここで…

(a) $e = y^i$ とおき、 $z^i - Ly^i > 0$ の場合、 $(x^i + y^i, 0, z^i - Ly^i)$ 、すなわち $(+, 0, +)$ も解となる

(b) $e = y^i$ とおき、 $z^i - Ly^i = 0$ の場合、 $(x^i + y^i, 0, 0)$ 、すなわち $(+, 0, 0)$ も解となる

(c) $e = y^i$ とおき、 $z^i - Ly^i < 0$ の場合、 e を新しく $z^i - L\tilde{e} = 0$ かつ $0 \leq \tilde{e} \leq y^i$ を満たす \tilde{e} に設定し直すことで、 $(x^i + \tilde{e}, y^i - \tilde{e}, 0)$ 、すなわち $(+, +, 0)$ も解となる

以上より、問題 (5.13) の解が $(0, +, +)$ か $(+, +, +)$ の場合、その解を $(+, 0, +)$ 、 $(+, 0, 0)$ 、 $(+, +, 0)$ のいずれかに書き換え可能であることが示された。 \blacksquare

問題 5.4

問題 (5.11) の解を (x^i, y^i, z^i) とすると

$$\bar{x}^i = 0, \quad \bar{y}^i = x^i + y^i, \quad \bar{z}^i = z^i + Lx^i$$

と定義される $(\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{z}^i)$ もまた、制約条件を満たしつつ解 (x^i, y^i, z^i) と同じ所得をもたらす。なぜなら…

$$\bar{\Pi}^i = (p\bar{x}^i - pA\bar{x}^i) + (p\bar{y}^i - pA\bar{y}^i - L\bar{y}^i) + \bar{z}^i$$

$$\begin{aligned}
&= [p(x^i + y^i) - pA(x^i + y^i) - L(x^i + y^i)] + z^i + Lx^i \\
&= (px^i - pAx^i) + (py^i - pAy^i - Ly^i) + z^i \\
&= \Pi^i \\
pA\bar{x}^i + pA\bar{y}^i &= pA(x^i + y^i) \leq p\omega^i (= p_1K^i) \\
L\bar{x}^i + \bar{z}^i &= z^i + Lx^i \leq 1
\end{aligned}$$

ところで、所得最大化のためには以下のように各制約条件が等号で成立しなければならない（さもないと所得をさらに引き上げる余地が存在するから）。

$$\begin{aligned}
pA\bar{x}^i + pA\bar{y}^i & (= pA\bar{y}^i) = p_1K^i \\
L\bar{x}^i + \bar{z}^i & (= \bar{z}^i) = 1
\end{aligned}$$

以上より、個人*i*の最大化された所得 Π^i は

$$\begin{aligned}
\Pi^i & (= \bar{\Pi}^i) = (p\bar{y}^i - pA\bar{y}^i - L\bar{y}^i) + \bar{z}^i \\
&= [p - (pA + L)]\bar{y}^i + \bar{z}^i \\
&= r \times pA\bar{y}^i + \bar{z}^i \\
&= rp_1K^i + 1
\end{aligned}$$

と表わすことができる。 ■

問題 5.5

(A) まず最初に、問題 (5.23) の解がとりうるパターンを以下の 4 つに絞ることができることを示す。

『金融的ブルジョア階級』 (+ , + , 0)

『独立自営階級』 (+ , 0 , 0)

『金融的準プロレタリア階級』 (+ , 0 , +)

『金融的プロレタリア階級』 (0 , 0 , +)

・解がとりうる全パターンをすべて列挙すると

$$\begin{array}{cccc}
(0, 0, 0) & (+, 0, 0) & (0, +, 0) & (0, 0, +) \\
(+, +, 0) & (+, 0, +) & (0, +, +) & (+, +, +)
\end{array}$$

となるが、このうち (0, 0, 0) と (0, +, 0) では個人に賦与された労働が未使用となっており、それは所得最大化に反するので、解になり得ない

・また、(0, +, +) と (+, +, +) の 2 つも解の候補から除外できる（この 2 つは個人が財の貸し手であると同時に借り手でもある状況に相当する）。その証明は以下のとおり。

問題 (5.23) の解を (x^i, y^i, z^i) と表記しよう。この解が (0, +, +) もしくは (+, +, +) の場合、言い換えると $y^i > 0$ かつ $z^i > 0$ の場合、 $(x^i + e, y^i - ae, z^i - e)$ という解も制約条件を満たしつつ同じ所得をもたらす。なぜなら…

$$\begin{aligned}
\Pi^i(e) &= p(1-a)(x^i + e) + Rp(y^i - ae) + [p - (1+R)pa](z^i - e) \\
&= p(1-a)x^i + Rpy^i + [p - (1+R)pa]z^i \\
&= \Pi^i
\end{aligned}$$

$$a(x^i + e) + (y^i - ae) = ax^i + y^i \leq K^i$$

$$l[(x^i + e) + (z^i - e)] = l(x^i + z^i) \leq 1$$

ここで…

(a) $e = z^i$ とおき、 $y^i - az^i > 0$ の場合、 $(x^i + z^i, y^i - az^i, 0)$ 、すなわち $(+, +, 0)$ もこの問題の解となる

(b) $e = z^i$ とおき、 $y^i - az^i = 0$ の場合、 $(x^i + z^i, 0, 0)$ 、すなわち $(+, 0, 0)$ もこの問題の解となる

(c) $e = z^i$ とおき、 $y^i - az^i < 0$ の場合、 e を新しく $e = y^i / a$ とおき直すと、 $(x^i + y^i / a, 0, z^i - y^i / a)$ 、すなわち $(+, 0, +)$ もこの問題の解となる

このように、問題 (5.23) の解が $(0, +, +)$ か $(+, +, +)$ の場合、その解を $(+, +, 0)$ 、 $(+, 0, 0)$ 、 $(+, 0, +)$ のいずれかに書き換えることが可能となる。 ■

(B) 次に、個人 i の属する階級が上の 4 つのどれであれ、彼の最大化された所得 Π^i は

$$(5.a.1) \quad \Pi^i = RpK^i + 1$$

と表せることを示す。証明は以下のとおり。

問題 (5.23) の解を (x^i, y^i, z^i) とすると、

$$\bar{x}^i = 0, \quad \bar{y}^i = ax^i + y^i, \quad \bar{z}^i = x^i + z^i$$

と定義される $(\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{z}^i)$ も制約条件を満たしつつ解 (x^i, y^i, z^i) と同じ所得をもたらす。なぜなら…

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^i &= p(1-a)\bar{x}^i + Rp\bar{y}^i + [p - (1+R)pa] \bar{z}^i \\ &= Rp(ax^i + y^i) + [p - (1+R)pa](x^i + z^i) \\ &= p(1-a)x^i + Rpy^i + [p - (1+R)pa] z^i \\ &= \Pi^i \end{aligned}$$

$$a\bar{x}^i + \bar{y}^i = ax^i + y^i \leq K^i$$

$$l(\bar{x}^i + \bar{z}^i) = l(x^i + z^i) \leq 1$$

ところで、所得最大化のためには以下のように各制約条件が等号で成立しなければならない (さもないと所得をさらに引き上げる余地が存在する)。

$$\bar{y}^i = K^i, \quad l\bar{z}^i = 1$$

この点を考慮すると、個人 i の最大化された所得 Π^i は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Pi^i (= \bar{\Pi}^i) &= Rp\bar{y}^i + [p - (1+R)pa] \bar{z}^i \\ &= RpK^i + w \quad \left(w = \frac{p - (1+R)pa}{l} \right) \end{aligned}$$

ここで w は「帰属賃金 (= 自営業者である各個人が自分に支払っている賃金)」を意味し、前節までと同様、以下これを価値尺度とする。

$$(5.a.2) \quad w (= \frac{p - (1+R)pa}{l}) = 1$$

これより、 $\Pi^i (= \bar{\Pi}^i) = RpK^i + 1$ が成立する。 ■

(C) 次に、各個人に賦与された富の大きさと、所得最大化の結果として所属する階級の関係を明らかにする。

(1) 与えられた財と労働の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$ax^i < K^i, \quad lx^i = 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.a.3) \quad a/l < K^i$$

が成立する場合、自営業的に生産するだけでは財を使い切れないので、それを他人に貸し付けることになる $\rightarrow (+, +, 0)$

∴ 財の賦与量が (5.a.3) を満たす場合、個人 i は『金融的ブルジョア階級』に属する

(2) 与えられた財と労働の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$ax^i = K^i, \quad lx^i = 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.a.4) \quad a/l = K^i$$

が成立する場合、自営業的に生産することで賦与された財と労働とちょうど使い切る形になる $\rightarrow (+, 0, 0)$

∴ 財の賦与量が (5.a.4) を満たす場合、個人 i は『独立自営階級』に属する

(3) 与えられた財と労働の賦与量 $(K^i, 1)$ に対して

$$ax^i = K^i, \quad lx^i < 1$$

が成立する場合、言い換えると

$$(5.a.5) \quad a/l > K^i$$

が成立する場合、賦与された財をすべて自営業的生産に投下してもまだ労働が余るので、他人から財を借りて生産を行う $\rightarrow (+, 0, +)$

なお、財を一切持たない ($K^i = 0$) のような個人も (5.a.5) で示される範囲に含まれるが、彼の解のパターンは $(0, 0, +)$

∴ 財の賦与量が (5.a.5) を満たす場合、個人 i は『金融的準プロレタリア階級』か『金融的プロレタリア階級』に属する。 ■

(D) 最後に、各個人の階級と搾取の関係を明らかにする。

(5.a.1) より、個人 i の取得労働は以下のように表わされる。

$$\lambda \times \frac{\Pi^i}{p} = \frac{\lambda(RpK^i + 1)}{p}$$

すべての個人は 1 単位の労働を供給する (= 「供給労働」が 1) なので、個人 i は被搾取者

であることの定義は以下のとおり。

$$\frac{\lambda(RpK^i + 1)}{p} < 1$$

この定義を書き直すと

$$\frac{p - \lambda}{pR\lambda} > K^i$$

ここで、(5.1) と (5.a.2) より以下が成立することを容易に示すことができる

$$\frac{p - \lambda}{pR\lambda} = \frac{a}{l}$$

したがって、 $a/l > K^i$ であるような個人 i は被搾取者となるが、(C) で示したように、そのような個人は『金融的準プロレタリア』もしくは『金融的プロレタリア』に属している（他の階級に属する個人についても同様に議論できる）。 ■

第6章 拡大再生産

6. 1 新古典派モデル

6. 2 ケインズモデル

<第6章の目的>

この章では「拡大再生産」、すなわち補填投資に加えて新投資が行われることで期首の資本財ストックが通時的に拡大していくような経済に焦点を当てて、資本蓄積率（or 経済成長率）はどのような要因に規定されるのか、資本蓄積の時間経路は安定的か、といった問題を考察する。

<モデル設定>

第5章の5.1節で用いた1部門モデルを想定する。すなわち…

- ・1種類の財が存在し、それは資本財としても消費財としても使える
- ・1単位の財を生産するには、 a 単位の財と l 単位の労働の投入が必要
- ・財の労働価値を λ とおくと、 λ は以下のようになる。

$$(6.1) \quad \lambda = a\lambda + l \rightarrow \lambda = \frac{l}{1-a}$$

(※ 投入係数が通時的に一定なので、財の労働価値も通時的に一定となる)

- ・労働者は1単位の労働供給に対して b 単位の財を受け取る（=実質賃金率が b ）
- ・期間 t の期首に K_t 単位の財（=資本財ストック）が存在する

資本蓄積過程に関する理解の仕方は、生産量が供給サイドの要因（=国内に存在する生産要素の質や量）で規定されると考える新古典派モデルと、生産量が需要サイドの要因（=財に対する総需要の大きさ）で規定されると考えるケインズモデルのどちらを想定するかで、大きく異なる。6.1節で新古典派モデルを、6.2節でケインズモデルを説明する。

6. 1 新古典派モデル

目的：生産量が供給サイドの要因（=国内に存在する生産要素の質や量）で規定される経済において経済成長率がどのように決まるかを検討する。

<生産量が資本財ストックの大きさに規定される場合>

資本財ストックの期首賦存量が相対的に稀少である状況（=労働に余剰が生じている状況）を想定する。この場合、資本財ストックの賦存量が生産量を規定し、その生産量を実現するのに必要な労働（=それは労働賦存量よりも常に小さい）が雇用される

(正常生産量)

期間 t の期首に K_t 単位の資本財ストックが存在するので、その期の「正常生産量 \bar{x}_t (= 期首の資本財ストックを完全稼働した場合に達成できる生産量)」は…

$$(6.2) \quad \bar{x}_t = K_t / a$$

(正常生産量の各階級への分配)

- ・労働者の取り分は $b\bar{x}_t$ であり、労働者はこれをすべて消費する
- ・資本家の取り分は $\bar{x}_t - b\bar{x}_t$ であり、これを以下の3つの用途に用いる
 - (i) 補填投資 $a\bar{x}_t$ (= K_t) (※ 補填投資分とは、期首の資本財ストックを維持する、すなわち「単純再生産」を実現する目的で、次期に持ち越される財の量のこと)
 - (ii) 新投資 I_t (※ 新投資分とは、期首の資本財ストックを増やす、すなわち「拡大再生産」を実現する目的で、補填投資分を超えて次期に持ち越される財の量のこと)
 - (iii) 資本家消費 C_t

したがって、以下が成立する

$$(6.3) \quad a\bar{x}_t + I_t + C_t = \bar{x}_t - b\bar{x}_t$$

なお、議論の単純化のため、資本家は新投資と消費の比率を一定に保つと仮定する

$$(6.4) \quad C_t = hI_t \quad (h \text{ は定数})$$

以上、(6.3) と (6.4) から新投資 I_t を以下のように表わすことができる

$$(6.5) \quad I_t = \frac{1-a-bl}{1+h} \bar{x}_t$$

∴ この経済では総生産量 \bar{x}_t の一定割合 ($= \frac{1-a-bl}{1+h}$) が新投資に用いられる

(経済成長率の決定)

- ・資本財ストックの推移式は以下のとおり

$$(6.6) \quad K_{t+1} = K_t + I_t$$

→ 経済成長率 \bar{g}_t ($= \frac{\bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t}{\bar{x}_t}$) は (6.2)、(6.5)、(6.6) より以下のようになる。

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \bar{g}_t &= \frac{\bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t}{\bar{x}_t} = \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = \frac{I_t}{K_t} = \frac{1-a-bl}{1+h} \times \frac{\bar{x}_t}{K_t} \\ &= \frac{1-a-bl}{a(1+h)} \end{aligned}$$

したがって…

命題 6.1 (新古典派的な 1 部門モデルにおける経済成長率)

各期の生産量が資本財ストックの大きさで規定されるような新古典派的な 1 部門モデルにおいて、その経済成長率は (6.7) で与えられる。

(労働搾取の存在条件と経済成長率との関係)

・ (6.1) をふまえて (6.7) を書き直すと

$$(6.8) \quad \bar{g}_t = \frac{(1-a)(1-\lambda b)}{a(1+h)}$$

したがって、(i) 純生産可能条件： $1-a > 0$ と (ii) 搾取の存在条件： $1-\lambda b > 0$ の 2 条件が満たされているとき、経済成長率が正となる。また、その大きさは「労働搾取の程度 (=労働供給 1 単位あたりの剰余労働： $1-\lambda b$)」が大きいほど、大きくなる。

・なぜ、経済成長率が正となるためには搾取の存在が不可欠なのか？

→ 労働搾取の存在条件が満たされるということは、剰余生産量が正、すなわち純生産量の一部が資本家に分配されることを意味する。拡大再生産を可能にする新投資 I_t は資本家の分配分から支出されるので、搾取の割合が大きいほど経済成長率も高くなる (=搾取なくして成長なし！)

問題 6.1 (難)

以下のような 2 部門モデルにおける経済成長率を求めよ。

- ・財 1 (=資本財) と財 2 (=消費財) が生産される基本的な 2 部門モデルを想定
- ・投入係数は今までどおり

	財 1 (資本財)	財 2 (消費財)
財 1 (資本財)	a_1	a_2
財 2 (消費財)	0	0
労働	l_1	l_2

- ・労働者は 1 単位の労働供給に対して財 2 (=消費財) を b 単位受け取る
- ・期間 t の期首における各部門の資本財ストックは $K_1(t)$ と $K_2(t)$
- ・各部門の正常生産量 ($\bar{x}_1(t)$ と $\bar{x}_2(t)$) は各部門の資本財ストックの大きさで規定される

<成長経路の完全な分析>

ここまで、資本財ストックの相対的稀少性ゆえに各期の生産量が資本財ストックに規定される状況を想定して分析してきた。しかし、経済成長率 (=資本蓄積率) \bar{g}_t が外生的な労働賦存量の成長率 n よりも大きい場合、このような想定はやがて成立しなくなる。したが

って完全な分析のためには、(i) $\bar{g}_t < n$ の場合、(ii) $\bar{g}_t = n$ の場合、(iii) $\bar{g}_t > n$ の場合、のすべてのケースについて経済成長経路の性質を明らかにする必要がある。

分析の詳細を章末付録にゆずって結論だけを述べると以下のとおり。

(i) $\bar{g}_t < n$ の場合

資本蓄積率の方が小さいので、資本・労働比率 k_t ($\equiv K_t/L_t$) は(その初期値 k_0 がどんな値であれ) やがて 0 へと収束する。すなわち、経済は \bar{g}_t の率で拡大再生産を続けるが、労働賦存量の成長率がそれ以上であるため、雇用率が 0 へと収束する。

(ii) $\bar{g}_t = n$ の場合

$k_0 \leq a/l$ の場合、経済は初期時点から定常状態 (= k_t が時間を通じて一定となる状態) にとどまる。一方、 $k_0 > a/l$ の場合、資本・労働比率は最終的に $k = a/l$ へと収束する。すなわち、このケースにおいては、資本・労働比率の初期値の応じて無数の定常状態が存在し、どの定常状態も n の率で拡大再生産が持続する。

(iii) $\bar{g}_t > n$ の場合

安定的な定常状態が一意に存在し、その定常状態における資本・労働比率は

$$(6.9) \quad k = \frac{1-a-bl}{nl(1+h)}$$

したがって、資本・労働比率の初期値 k_0 がどのような値であれ、最終的にその値は (6.9) へと収束する。収束先の資本蓄積率 (= 経済成長率) は (資本・労働比率が一定なので) n に等しくなる。

(※ なお、長期的な経済成長経路の性質を検討する上で「投入係数が変化しない」という想定は現実的とは言えない。実際、新古典派成長理論では資本と労働の間のスムーズな代替関係を想定した生産関数を用いて分析するのが標準的で、この種の線形モデルはほとんど顧みられていない。新古典派成長理論についてはマクロ経済学のテキストを参照せよ。)

6. 2 ケインズモデル

目的：生産量が需要サイドの要因 (= 財に対する総需要の大きさ) で規定される経済において、均衡生産量はどのように決まるのか、資本蓄積経路は安定的か、といった問題を検討する。

<有効需要原理に基づく生産量と稼働率の決定>

・新古典派モデルでは、各期の生産量が供給サイドの要因 (= 資本財ストックの量) で規

定された：資本財ストック $K_t \rightarrow$ 正常生産量 $\bar{x}_t (= K_t / a)$

・ケインズモデルでは、各期の生産量が需要サイドの要因 (=財に対する総需要の大きさ) で規定される：財に対する総需要 \rightarrow 生産量 $x_t \rightarrow$ 稼働率 $\delta_t (= x_t / \bar{x}_t)$

(財に対する総需要)

・1部門モデルにおいて、財に対する総需要 D_t は…

$$D_t = \text{補填投資需要} + \text{新投資需要} + \text{労働者の消費需要} + \text{資本家の消費需要}$$

・期間 t の生産量を x_t とおくと…

(a) 期首に ax_t だけ財を投入したことになるので、補填投資需要は ax_t

(b) 労働者は受け取った賃金所得 bx_t をすべて消費に充てると想定

\rightarrow 労働者の消費需要は bx_t

(c) 資本家は**その期の資本所得** ($= x_t - ax_t - bx_t$) を受け取る前に、新投資需要 I_t や消費需要 C_t の水準を決定する ($= I_t$ や C_t は**その期の資本所得とは独立に決定される**) と想定。

(理由：労働者と資本家の両方がその期の所得を受け取ってから支出を行うと想定すると、誰も所得を獲得できなくなるから (=所得は誰かが支出して初めて生じる)。その期の所得の裏付けなしに支出を計画できるのは、手元に豊富な貨幣を保有する資本家の方なので、このような想定をおく¹²⁾

(d) 議論の単純化のため、資本家は I_t と C_t の比率を一定に保つと仮定。

$$(6.10) \quad C_t = hI_t \quad (h \text{ は定数})$$

∴ 以上より、財に対する総需要は以下ようになる。

$$(6.11) \quad D_t = (a + bl)x_t + (1 + h)I_t$$

(財市場を均衡させる生産量とその性質)

・最も単純なケインズモデルでは、諸価格 (賃金を含む) は固定的で、企業は「数量調整」を通じて、需要量に等しいだけ財を生産するような状況を想定する (=いわゆる「有効需要原理」)

$$(6.12) \quad x_t = D_t$$

したがって、(6.11) と (6.12) より、財市場の均衡条件は

$$(6.13) \quad x_t = (a + bl)x_t + (1 + h)I_t$$

となり、財市場を均衡させる生産量は以下ようになる

$$(6.14) \quad x_t = \frac{(1 + h)I_t}{1 - (a + bl)}$$

∴ 均衡生産量 x_t は、資本家が (その期に受け取る資本所得とは独立に) 決定する新投資

¹² あるいは、例えば新投資需要は資本家自身ではなく、企業家のような代理人が計画し、資本家は彼に融資するといった想定をおくことで、新投資需要の資本家所得からの独立的決定を正当化することも可能であろう。

需要 I_t の大きさに依存して決まる。

→ I_t が 1 単位変化すると、 x_t は $\frac{(1+h)}{1-(a+bl)}$ (>1) 単位変化する (=乗数効果)

以上より…

命題 6.2 (ケインズの的な 1 部門モデルにおける均衡生産量)

各期の生産量が総需要の大きさに規定されるようなケインズの的な 1 部門モデルにおいて、その均衡生産量は (6.14) で与えられる。

(経済成長率の導出)

・ (6.14) より、この経済の経済成長率 μ_t は

$$\mu_t \left(= \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} \right) = \frac{I_{t+1} - I_t}{I_t}$$

となり、(モデルの外生変数である) 新投資需要の成長率に等しくなる。したがって…

(a) 仮に新投資需要が毎期一定と仮定した場合、経済成長率 μ_t はゼロとなる

(b) 仮に資本蓄積率が一定 ($I_t / K_t = g$) となるように各期の新投資需要を決定すると仮定した場合、経済成長率 μ_t は資本蓄積率 g に一致する。

問題 6.2

上の (b) の結果を確認せよ。

(稼働率の導出)

・ (6.14) と (6.2) より、この経済の稼働率 δ_t ($= x_t / \bar{x}_t$) は

$$(6.15) \quad \delta_t = \frac{a(1+h)}{1-(a+bl)} g_t \quad \left(g_t = \frac{I_t}{K_t} \right)$$

となる。したがって正常稼働率 ($\delta_t = 1$) が成立するために必要とされる資本蓄積率 \bar{g} は

$$(6.16) \quad \bar{g} = \frac{1-a-bl}{a(1+h)}$$

となり、これは新古典派モデルの正常資本蓄積率 (6.7) に等しい。ただし、このモデルで資本家が新投資をそのような水準に決定する必然性はない。

問題 6.3

問題 6.1 と同じ設定の 2 部門モデルにおいて、期間 t における各部門の稼働率 ($\delta_1(t)$ と $\delta_2(t)$) を求めよ。

(労働成長率 n との関係)

・資本家が決定する資本蓄積率 g (←議論の単純化のため、以下では通時的に一定と仮定) と外生的な労働賦存量の成長率 n は一般に一致しない

・期間 t における労働需要は $lx_t = lx_0(1+g)^t$ 、労働賦存量は $L_t = L_0(1+n)^t$ なので、期間 t における雇用率は以下のとおり

$$\text{期間 } t \text{ の雇用率} = \frac{lx_t}{L_t} = \frac{lx_0}{L_0} \left(\frac{1+g}{1+n} \right)^t$$

(i) $g > n$ の場合

雇用率が通時的に上昇し、やがて 1 を超過する。したがって長期的には労働成長率 n に制約される形でしか拡大再生産を実現できない

(ii) $g = n$ の場合

雇用率は通時的に一定。経済は $g = n$ の率で拡大再生産を持続し続けることができる

(iii) $g < n$ の場合

雇用率が通時的に低下し、やがて 0 へと収束する。理論上、経済は g の率で拡大再生産が可能だが、失業率が増加し続ける点を考慮すると有意な資本蓄積経路とは言い難い

∴ 安定的な拡大再生産が可能なのは (ii) $g = n$ の場合のみ

<資本蓄積経路の不安定性>

ここまで、資本家が決定する新投資需要 I_t (=もしくは資本蓄積率 g_t) が外生的に与えられた状況を想定した。以下では、これらの水準を決定する 1 つのシンプルな仮説を提示し、その仮説の下で資本蓄積経路が不安定的になることを示す。

(ハロッド=置塩型の投資関数)

資本家は、前期の稼働率 δ_{t-1} が 1 より大きい場合 (=財に対する総需要が正常生産量を上回る場合)、生産能力を拡張すべく今期の資本蓄積率 g_t を前期よりも高く設定すると仮定¹³。すなわち…

¹³ 置塩 (1976) はここでさらに「稼働率関数」という考え方を導入する。主体レベルで見れば、稼働率の調整に関する意思決定を行うのは資本家であり、彼はその期に高い利潤率を獲得できそうなら稼働率を高く設定する (逆は逆) と仮定しよう。すなわち

$$\delta_t = \delta(r_t)、\delta'(r_t) > 0、\delta(\bar{r}) = 1 \quad (\bar{r} : \text{正常生産量に対応する利潤率})$$

置塩は、有効需要原理を通じてマクロ的に決まる稼働率が、上述の資本家の稼働率決定態度と整合的になるように利潤率 (ひいては実質賃金率) が決まると考えた。これは、古典派の第 1 公準を認めた上で、有効需要原理を通じてマクロ的に決まる生産量が、企業の利潤最大化行動と整合的となるように実質賃金率が決まると考えるケインズの実質賃金決定論と本質的に同じロジックである。この点に興味のある人は置塩 (1976) や佐藤 (2011) を参照せよ。

$$(6.17) \quad g_t = g_{t-1} + \beta(\delta_{t-1} - 1) \quad (\beta > 0)$$

・ (6.15) を (6.17) に代入することで、ハロッド=置塩型の投資関数の下での資本蓄積率の時間経路は

$$(6.18) \quad g_t = \left[1 + \frac{\beta a(1+h)}{1-(a+bl)} \right] g_{t-1} - \beta$$

これを図示すると…

< 図 6.1 : ハロッド=置塩型の投資関数の下での資本蓄積率の動学 >

(資本蓄積経路の不安定性)

(6.18) および図 6.1 より、以下が成立する。

(i) 定常状態における資本蓄積率 g は (6.16) で与えられ、それは正常生産量を実現するのに必要な蓄積率に等しい。

(ii) 初期時点の資本蓄積率が (6.16) よりも大きい場合、資本蓄積率は通時的に上昇し続ける。初期時点の資本蓄積率が (6.16) よりも小さい場合、資本蓄積率は通時的に低下し続け、その値はやがて負になる (=単純再生産すら不可能となる)。

(iii) 初期時点の資本蓄積率がたまたま (6.16) と一致する場合に限り、経済は稼働率が 1 の定常状態に止まり続ける。

以上より…

命題 6.3 : ケインズのな 1 部門モデルにおける資本蓄積経路の不安定性

各期の生産量が総需要の大ききで規定されるようなケインズのな 1 部門モデルにおいて、資本家の投資決定態度としてハロッド=置塩型の投資関数 (6.17) を想定すると、初期時点の資本蓄積率がその定常値 (6.16) 以外の場合、その乖離幅が累積的に拡大する。

・なぜ不均衡が累積するのか？

→ 前期に稼働率が 1 を超えると、資本家は生産能力を拡張すべく新投資を拡大するが、それが今期の総需要を供給能力以上に引き上げることで稼働率がさらに上昇するため

※ 注意：投資関数の定式化はこれ以外にも存在するので、「資本蓄積経路は不安定的」という上記の結論は絶対的なものではない。また、現実には上述の議論が示唆するような極めて不安定的な資本蓄積経路が観察されたことはほとんどないので、上の議論はせいぜい短期ないし中期の資本蓄積経路で生じうる不安定性の一端を説明する理論の一つと考えるのが妥当であろう。

(労働成長率 n との関係)

たとえ初期時点の資本蓄積率 g が (6.16) で与えられたとしても、その資本蓄積率と (外生的な) 労働成長率 n が一致している保証はない。上述したように、安定的な拡大再生産が可能となるのは両者が一致する場合のみ。

<第6章の問題の解答>

問題 6.1

(各部門の正常生産量)

期間 t の期首における第 1 (第 2) 部門の資本財ストックが $K_1(t)$ ($K_2(t)$) なので、各部門の正常生産量は

$$(6.19) \quad \bar{x}_1(t) = K_1(t)/a_1, \quad \bar{x}_2(t) = K_2(t)/a_2$$

(正常生産量の各階級への分配)

・労働者は 1 単位の労働供給に対して財 2 (消費財) を b 単位受け取るので、期間 t における労働者への分配分は $b[l_1\bar{x}_1(t) + l_2\bar{x}_2(t)]$

・したがって、資本家が受け取る財 1 (資本財) と財 2 (消費財) の量はそれぞれ $\bar{x}_1(t)$ と $\bar{x}_2(t) - b[l_1\bar{x}_1(t) + l_2\bar{x}_2(t)]$

・資本家は受け取った財 1 を「補填投資」と「新投資」に充てる。期間 t の各部門の生産量がそれぞれ $\bar{x}_1(t)$ と $\bar{x}_2(t)$ なので、第 1 部門の補填投資は $a_1\bar{x}_1(t)$ ($= K_1(t)$)、第 2 部門の補填投資は $a_2\bar{x}_2(t)$ ($= K_2(t)$) となる。また、第 1 (第 2) 部門への新投資を $I_1(t)$ ($I_2(t)$) と表記する。したがって以下が成立する。

$$(6.20) \quad a_1\bar{x}_1(t) + a_2\bar{x}_2(t) + I_1(t) + I_2(t) = \bar{x}_1(t)$$

$$\text{(もしくは、 } K_1(t) + K_2(t) + I_1(t) + I_2(t) = \bar{x}_1(t) \text{)}$$

・資本家は受け取った財 2 をすべて消費に充てると想定する。ゆえに資本家の消費 $C(t)$ は

$$(6.21) \quad C(t) = \bar{x}_2(t) - b[l_1\bar{x}_1(t) + l_2\bar{x}_2(t)]$$

・議論の単純化のため、資本家は新投資の合計 ($= I_1(t) + I_2(t)$) と消費 $C(t)$ の (量的) 比率を一定に保つと仮定する。

$$(6.22) \quad C(t) = h[I_1(t) + I_2(t)] \quad (h \text{ は定数})$$

・以上、(6.20)、(6.21)、(6.22) より、以下が成立する。

$$h\bar{x}_1(t) = h[a_1\bar{x}_1(t) + a_2\bar{x}_2(t)] + \bar{x}_2(t) - b[l_1\bar{x}_1(t) + l_2\bar{x}_2(t)]$$

これをさらに整理することで以下の補題を得る

補題 6.1: 新古典派的な 2 部門モデルにおける部門間生産比率

各部門の生産量が資本財ストックの大きさで規定されるような新古典派的な 2 部門モデルにおいて、部門間の正常生産量の比率は

$$(6.23) \quad z_t \left(= \frac{\bar{x}_2(t)}{\bar{x}_1(t)} \right) = \frac{(1-a_1)h + bl_1}{1 + ha_2 - bl_2} = z$$

となり、その比率は通時的に一定となる。

(経済成長率の決定)

・ (6.23) より、部門間の資本財ストック比率も通時的に一定となる

$$(6.24) \quad \frac{K_2(t)}{K_1(t)} = \frac{a_2 \bar{x}_2(t)}{a_1 \bar{x}_1(t)} = \frac{a_2 z}{a_1}$$

→ これより各部門の資本財ストックの成長率が等しくなる

$$(6.25) \quad \frac{K_2(t+1)}{K_1(t+1)} = \frac{K_2(t)}{K_1(t)} \rightarrow \frac{K_1(t+1)}{K_1(t)} = \frac{K_2(t+1)}{K_2(t)} (=1+g(t))$$

$K_1(t+1) = K_1(t) + I_1(t)$ および $K_2(t+1) = K_2(t) + I_2(t)$ なので、(6.25) を次のように書くこともできる

$$(6.26) \quad g(t) = \frac{I_1(t)}{K_1(t)} = \frac{I_2(t)}{K_2(t)}$$

∴ 両部門の資本蓄積率 (= 正常生産量の成長率) は等しくなる。

・ (6.20) の両辺を $K_1(t)$ で割ると

$$1 + \frac{K_2(t)}{K_1(t)} + \frac{I_1(t)}{K_1(t)} + \frac{K_2(t)}{K_1(t)} \frac{I_2(t)}{K_2(t)} = \frac{\bar{x}_1(t)}{K_1(t)}$$

これに (6.19)、(6.24)、(6.26) を代入して整理することで、以下を得る。

命題 6.4 (新古典派的な 2 部門モデルの経済成長率)

各部門の生産量が資本財ストックの大きさで規定されるような新古典派的な 2 部門モデルの経済成長率 \bar{g} は以下で与えられる。

$$(6.27) \quad \bar{g} = \frac{(1-a_1)(1-bl_2) - a_2 bl_1}{a_2(h+bl_1) + a_1(1-bl_2)}$$

(労働搾取の存在条件と経済成長率との関係)

・ 財 2 (= 消費財) の労働価値 λ_2 は

$$(6.28) \quad \lambda_2 = l_2 + \frac{a_2}{1-a_1} l_1$$

したがって、(6.28) をふまえて (6.27) を書き直すと

$$\bar{g} = \frac{(1-a_1)(1-\lambda_2 b)}{a_2(h+bl_1) + a_1(1-bl_2)}$$

したがって、(i) 純生産可能条件: $1-a_1 > 0$ と (ii) 労働搾取の存在条件: $1-\lambda_2 b > 0$ の 2 条件が満たされているとき、経済成長率が正となる¹⁴。また、その大きさは「労働搾取の程度 (= 労働供給 1 単位あたりの剰余労働: $1-\lambda_2 b$)」が大きいほど、大きくなる。

¹⁴ $1-a_1 > 0$ と $1-\lambda_2 b > 0$ が満たされれば $1-bl_2 > 0$ は自動的に成立する。

問題 6.2

$g_t = I_t / K_t$ とおくと、経済成長率 μ_t を以下のように表わすことができる。

$$\mu_t = \frac{I_{t+1} - I_t}{I_t} = \frac{\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} \frac{K_{t+1}}{K_t} - \frac{I_t}{K_t}}{\frac{I_t}{K_t}} = \frac{g_{t+1}(1+g_t) - g_t}{g_t}$$

したがって g_t が時間を通じて一定 ($g_t = g$) の場合、 $\mu_t = g$ となる。 ■

問題 6.3

ケインズのな 2 部門モデルにおいて、各部門の需給均衡条件は以下のようになる。

$$(6.29) \quad [\text{第 1 部門}] \quad x_1(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + I_1(t) + I_2(t)$$

$$[\text{第 2 部門}] \quad x_2(t) = b[l_1 x_1(t) + l_2 x_2(t)] + C(t)$$

ここで、 $x_1(t)$ 、 $a_1 x_1(t)$ 、 $I_1(t)$ は第 1 部門の総生産量、補填投資需要、新投資需要、 $x_2(t)$ 、 $a_2 x_2(t)$ 、 $I_2(t)$ は第 2 部門の総生産量、補填投資需要、新投資需要、 $b[l_1 x_1(t) + l_2 x_2(t)]$ は労働者の消費需要、 $C(t)$ は資本家の消費需要である。資本家の各部門への新投資需要 ($I_1(t)$ と $I_2(t)$) と消費需要 $C(t)$ は、資本家はその期に受け取る資本所得とは独立に決定される点に注意せよ。さらに議論の単純化のため、資本家は新投資需要の合計と消費需要の (量的) 比率を一定に保つと仮定する。

$$(6.30) \quad C(t) = h[I_1(t) + I_2(t)] \quad (h \text{ は定数})$$

(6.29) と (6.30) より、需給を均衡させる各財の生産量は

$$x_1(t) = \frac{1 - bl_2 + ah}{\Delta} I(t), \quad x_2(t) = \frac{bl_1 + (1 - a_1)h}{\Delta} I(t)$$

$$(\text{ここで、} I(t) = I_1(t) + I_2(t), \quad \Delta = (1 - a_1)(1 - bl_2) - a_2 bl_1)$$

したがって、各部門の稼働率はそれぞれ以下のようになる。

$$\delta_1(t) \quad (= \frac{x_1(t)}{\bar{x}_1(t)}) = a_1 \frac{1 - bl_2 + ah}{\Delta} \frac{I(t)}{K_1(t)}$$

$$\delta_2(t) \quad (= \frac{x_2(t)}{\bar{x}_2(t)}) = a_2 \frac{bl_1 + (1 - a_1)h}{\Delta} \frac{I(t)}{K_2(t)}$$

<章末付録：新古典派的な線形経済モデルの経済成長経路の完全な分析>

ここでは、資本財ストックの成長率 \bar{g}_t と外生的な労働賦存量の成長率 n の大小関係に応じてどのような成長経路が実現するかを検討する。

・「1 単位の財を生産するには、 a 単位の財と l 単位の労働の投入が必要」という技術を生産関数の形で表わすと以下のとおり

$$(6.31) \quad \bar{x}_t = \min\left(\frac{K_t}{a}, \frac{L_t}{l}\right)$$

ここで、 K_t と L_t はそれぞれ期間 t の期首における資本財ストックと労働賦存量である。

・(6.5) より、正常生産量 \bar{x}_t と新投資 I_t の間には以下の関係が成立する

$$(6.32) \quad I_t = s\bar{x}_t \quad \left(s = \frac{1-a-bl}{1+h}\right)$$

これより、資本財ストックの通時的な変化は

$$(6.33) \quad \begin{aligned} K_{t+1} &= K_t + I_t \\ &= K_t + s \times \min\left(\frac{K_t}{a}, \frac{L_t}{l}\right) \quad (K_0 : \text{所与}) \end{aligned}$$

・労働賦存量の通時的な変化は

$$(6.34) \quad L_{t+1} = (1+n)L_t \quad (L_0 : \text{所与})$$

∴ このモデルの成長経路は (6.33) と (6.34) の 2 式で完全に決定される

・(6.33) の両辺を L_t で割って整理すると

$$(6.35) \quad k_{t+1} = \frac{1}{1+n} \left[k_t + s \times \min\left(\frac{k_t}{a}, \frac{1}{l}\right) \right] \quad (k_0 : \text{所与})$$

ここで、 $k_t (= K_t/L_t)$ は資本・労働比率 (=1 人あたり資本財ストック) を意味する。

以下では、 k_t/a と $1/l$ をその大小関係で場合分けして、(6.35) で規定される k_t に関する動学式をビジュアル化する。

(I) $k_t/a < 1/l$ (もしくは $k_t < a/l$) の場合

この場合、 $\min\left(\frac{k_t}{a}, \frac{1}{l}\right) = \frac{k_t}{a}$ となるので、(6.35) は以下のように書き直せる。

$$k_{t+1} = \frac{1+(s/a)}{1+n} k_t$$

<図 6.2 : $k_t < a/l$ の場合の (6.35) >

(II) $k_t/a > 1/l$ (もしくは $k_t > a/l$) の場合

この場合、 $\min\left(\frac{k_t}{a}, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{l}$ となるので、(6.35) は以下のように書き直せる。

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} k_t + \frac{(s/l)}{1+n}$$

<図 6.3 : $k_t > a/l$ の場合の (6.35) >

∴ したがって、両者を合わせると…

<図 6.4 : (6.35) の動学>

・図 6.4 で示された動学式 (6.35) の性質は、以下の 3 つの場合に分けて検討する必要がある

(i) $s/a > n$ の場合

この場合、図 6.4 は以下のようになる

<図 6.5 : $s/a > n$ の場合の (6.35) >

これより、安定的な定常状態 (k_t が時間を通じて一定となる状態) が一意に存在し、その定常状態における資本・労働比率は以下のようになる。

$$k = \frac{1}{1+n} k + \frac{(s/l)}{1+n} \rightarrow k = \frac{s}{nl} \left(= \frac{1-a-bl}{nl(1+h)} \right)$$

定常状態では資本・労働比率が一定なので、資本財ストックは労働賦存量の成長率 n と同率で成長する。

なお、(6.2) と (6.5) より以下が成立する。

$$s/a = s\bar{x}_t / K_t = I_t / K_t = \bar{g}_t$$

したがって、 $s/a > n$ とは $\bar{g}_t > n$ 、すなわち資本蓄積率が労働成長率よりも大きいことを意味している。

(ii) $s/a = n$ (or $\bar{g}_t = n$) の場合

この場合、図 6.4 は以下のようになる

<図 6.6 : $s/a = n$ の場合の (6.35) >

したがって、 $k_0 > a/l$ の場合、最終的に資本・労働比率の値は $k = a/l$ へと収束する。一

方、 $k_0 \leq a/l$ の場合、経済は初期時点から定常状態にとどまる。

(iii) $s/a < n$ (or $\bar{g}_t < n$) の場合

この場合、図 6.4 は以下のようなになる

<図 6.7 : $s/a < n$ の場合の (6.35) >

したがって、資本・労働比率の初期値 k_0 がどんな値であれ、最終的にその値は $k=0$ へと収束する。資本蓄積率 \bar{g}_t が労働成長率 n よりも小さいので、生産量自体は \bar{g}_t の率で成長するが、雇用率は通時的に低下し、0 へと収束する。