The Society for Economics Studies
The University of Kitakyushu
Working Paper Series No.2010-2
(accepted in 1/10/2010)

「完全予見」概念をひもとく[†]

田中 淳平　安岡 匡也　林田 実[‡]

目次

1　はじめに

古典的なマクロ経済学が終焉を迎え、現代のマクロ経済学ではミクロ的な基礎付けを重視する動学的一般均衡モデル、Dynamic Stochastic General Equilibrium Model(DSGE)、が主役の座を射止めつつある。このモデルは、家計や企業のミクロ的な最適化行動を、時間軸上で考え、その定常解の近傍の性質を調べることによって、マクロ経済のメカニズムあるいはマクロ経済政策の効果について理解を深めようとするものである。

ところで、DSGE モデルを勉強しようとする初学者は家計、企業の最適化行動に関連して、「完全予見」という言葉に幾度となく遭遇することになる。例えば、動学的一般均衡を扱ったマクロ経済学の標準的なテキストである Turnovsky (2000)では、「完全予見とは経済における様々な要素に対する計画された需要が全て実際の供給と一致する。言い換えれば、全ての経済変数が正しく予想されていること」と記述されているが、それ以上の具体的な解説は見当たらない。また、我々は論文を執筆して投稿し、レフェリーによるコメントを受けるということを日々の研究生活の中で実践しているわけであるが、そのレフェリーコメントの中にもしばしば「完全予見」という言葉が使われており、しかも、それが多義的であると感じている。「完全予見」という言葉が DSGE モデルにおいて重要な概念であるにもかかわらず、このような状態にあるということは浅学非才の我々をはじめ、初学者をとまどわせるには十分であろう。そこで、我々は、しばしば曖昧に使われがちな「完全予見」

[†] 本稿の作成にあたり、勉便会参加者である前田淳教授、池田欽一准教授、魏芳准教授、中尾泰士教授より有益なコメントを頂いた。記して感謝する。なお、有り得べき誤謬は全て筆者の責に帰すものである。
[‡]この論文は「勉便会」のメンバーで作成した。少子化にともなう学生人口の減少、巨額の財政赤字に起因する大学予算の削減等、大学を取り巻く環境は日増しに悪化している。ひるがえって、このような環境変化に大学の研究組織が対応できているか、はなはだ疑問である。勉便会とは、ややもすれば、孤立しがちな大学教員の力を結集して、研究を通じて社会に貢献するという原点に立ち戻る意志を持った教員の勉強会である。その活動は大きく「大勉会」と「小勉会」に分けられる。「大勉会」では、経済学の大枠に関する、重要で、概念的な議論を行っている。また、「小勉会」では、具体的な経済分析において必要とされるスキルアップのための技術的なコーチングを行っている。

という概念をできるだけ、シンプルにしかも本質をえぐり出して、再説明しようと試みた。本稿が「完全予見」のあいまいさを幾分でも払拭できるものであれば望外の喜びである。

２　非確率的な需要・供給モデルにおける完全予見

まず最初に、シンプルな部分均衡型の動学モデルを用いて、完全予見概念の具体的説明を行うことにする。

ある財の市場に関する需要関数・供給関数が以下のように与えられるとしよう。

（需要関数）$D_t = \alpha_0 - \alpha_1 \times P_t$

（供給関数）$S_t = \beta_0 + \beta_1 \times {}_{t-1}P_t^e$　（$\alpha_0 > \beta_0$）

ここで、D_t、S_t、P_t はそれぞれ、期間 t における当該財の需要量、供給量、価格を表す。α_0、α_1、β_0、β_1 は正のパラメータである。さらに ${}_{t-1}P_t^e$ は期間 $t-1$ において形成される、期間 t の価格の予想である。すなわち、企業は期間 t の財価格を、あらかじめ $t-1$ 期に予想した上で、その期待（expectation）価格に応じて、供給曲線を形成すると想定する。ここで、市場の均衡は需要と供給が一致するところで達成されるので、期間 t における均衡価格 P_t^* は

$$P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times {}_{t-1}P_t^e$$

で与えられる。これは均衡価格 P_t^* が期待 ${}_{t-1}P_t^e$ の大きさに依存して決定されることを示している。そこで、${}_{t-1}P_t^e$ がどのように形成されるかに応じて、次の三つの場合を考えてみよう。

＜Case 1：外生的期待の場合＞

期待が外生的に、${}_{t-1}P_t^e = \overline{P}$ として与えられる時には、均衡価格は

$$P_t^* \ (= P^*) = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times \overline{P}$$

となる。これは一般に $P^* \neq \overline{P}$ であることを示しているので、この場合、期待価格とその実現値は時間を通じて乖離し続けることになる。

＜Case 2：静学的期待の場合＞

その期の均衡価格が来期も成立すると想定するような期待が形成される場合はどうであ

ろうか。この場合、${}_{t-1}P_t^e = P_{t-1}^*$ が成立するから、結局、

$$P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times P_{t-1}^*$$

となり、$\{P_t^*\}$ に関する差分方程式が得られる。その動学的経路は図 1 で与えられる（蜘蛛の巣モデル）。

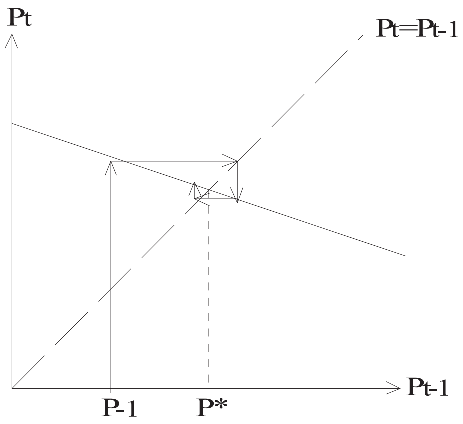

図 1.1：価格の動学(安定的な場合)

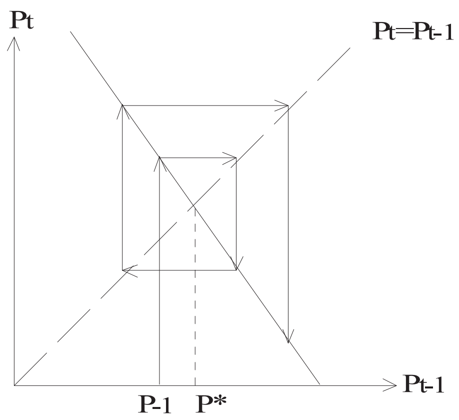

図 1.2：価格の動学(不安定な場合)

定常状態では t 期と $t-1$ 期における均衡価格 P^* は一致するので、価格の定常解は $P^* = \dfrac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1}$ となる。従って、このケースでは、定常状態では期待とその実現値が一致しているが、移行過程では一致しない。

ちなみに定常状態へと至る過程の「安定性」は、需要・供給曲線の傾きによって異なる。任意の初期時点の価格 P_{-1} が与えられた下で定常状態の価格 P^* に収束するための条件は $-1 < -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} < 0$、すなわち $\alpha_1 > \beta_1 > 0$ である。これは安定性条件と言われる。この条件を満たしている時、与えられた価格が例え長期均衡の水準 P^* からかい離していたとしても、長期均衡の水準 P^* に収束する。α_1 が β_1 よりも大きいことがこの安定性条件を満たすためには必要であるが、その理由は次の通りである。α_1 が β_1 よりも大きい場合、超過需要の絶対値を前期より減らそうとすることによって今期の超過需要の絶対値は前期より減少する。その結果、超過需要の絶対値はどんどん縮小し、最終的に需給が均衡する。この条件は、超過需要(超過供給)を解消するために生産者が生産を調整することによって、次の期には超過需要(超過供給)が減少する条件である。

図 1.1 はこの条件を満たしている。従って図 1.1 の場合、与えられた価格 P_{-1} は時間を通

じて振動しながらP^*に収束する。一方で図 1.2 は安定性条件を満たさない場合を示している。この場合、与えられた価格P_{-1}は時間を通じて振動しながら発散する、すなわちP^*からどんどん遠ざかる。

＜Case 3：完全予見の場合＞

さて、最後に、完全予見の場合を考えよう。この場合、企業が期待する価格は常に自己実現しているはずである。換言すれば、期間$t-1$において、期間tの均衡価格P_t^*を知っていると考えられる。したがって、${}_{t-1}P_t^e = P_t^*$が成立していることになる。よって、均衡価格は次式を満たしている。

$$P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times P_t^*$$

これを解くと、ただちに$P_t^* = \dfrac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1}$が得られる。すなわち、完全予見の場合、いきなり蜘蛛の巣モデルの定常状態における均衡価格P^*が成立する（移行過程は存在しない）。また、言うまでもなく期待は常に自己実現している。

3　確率的な需要・供給モデルにおける完全予見～合理的期待との関連～

２節では、確率項を含まない需要関数、供給関数を考えたが、本節では、合理的期待概念を具体的に説明する目的で、両関数にホワイトノイズがプラスされている次のようなモデルを考える。

（需要関数）$D_t = \alpha_0 - \alpha_1 \times P_t + \varepsilon_t^d$　（$\varepsilon_t^d \sim iid\ N(0, \sigma_d^2)$）

（供給関数）$S_t = \beta_0 + \beta_1 \times {}_{t-1}P_t^e + \varepsilon_t^s$　（$\varepsilon_t^s \sim iid\ N(0, \sigma_s^2)$）

前節と同様に、需要と供給が一致するところで、均衡価格が決定されるので、期間tにおける均衡価格P_t^*は次式で与えられる。

$$P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times {}_{t-1}P_t^e + \frac{\varepsilon_t^d - \varepsilon_t^s}{\alpha_1}$$

以下では定常状態の価格が期待形成のあり方とどのように関係しているかを前節と同じ手順で論じていく。

＜Case 1：外生的期待の場合＞

期待が外生的に、${}_{t-1}P_t^e = \overline{P}$ として与えられる時には、均衡価格は

$$P_t^* \ (= P^*) = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times \overline{P} + \frac{\varepsilon_t^d - \varepsilon_t^s}{\alpha_1}$$

となる。これは前節と同様に、$P^* \neq \overline{P}$ であることを示しているので、期待価格とその実現値は時間を通じて乖離し続ける。前節と異なるところはこの乖離の仕方に確率項が関与し、システマティックな乖離プラス確率的な乖離が生じるところである。

＜Case 2：静学的期待の場合＞

その期の均衡価格が来期も成立すると想定するような期待が形成される場合はどうであろうか。この場合、${}_{t-1}P_t^e = P_{t-1}^*$ が成立するから、結局、

$$P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times P_{t-1}^* + \frac{\varepsilon_t^d - \varepsilon_t^s}{\alpha_1}$$

となる。これは、$\{P_t^*\}$ に関する差分方程式に確率項が加算された形をしており、ドリフト付きの AR モデルに均衡価格が従うことがわかる。このとき、確率項を除いた価格の定常解は $P^* = \dfrac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1}$ となる。従って、このケースでは、定常状態では期待とその実現値がホワイトノイズを除いて一致している（前期の均衡価格と今期の均衡価格のホワイトノイズは異なることに注意)。しかし、移行過程では一致しない。

＜Case 3：完全予見の場合＞

前節と同様に、この場合、企業が期待する価格は常に自己実現しているはずである。換言すれば、期間 $t-1$ において、期間 t の均衡価格 P_t^* を知っていると考えられる。したがって、${}_{t-1}P_t^e = P_t^*$ が成立しているから、均衡価格は次式を満たしている。

$$P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times P_t^* + \frac{\varepsilon_t^d - \varepsilon_t^s}{\alpha_1}$$

よって、ただちに、$P_t^* = \dfrac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1} + \dfrac{\varepsilon_t^d - \varepsilon_t^s}{\alpha_1 + \beta_1}$ が得られる。すなわち、完全予見の場合、＜Case 2：静学的期待の場合＞の定常解に瞬時に移行することになる。しかしながら、${}_{t-1}P_t^e = P_t^*$ は何を意味しているであろうか。これは、$t-1$ 期に t 期のホワイトノイズ ε_t^d 、ε_t^s を含

めて経済主体が正確無比な期待を形成していることを意味する。これはホワイトノイズの定義に反していると言って良い。確率的な需要・供給モデルでは、完全予見の概念は存在し得ないということが分かる。このことから、次のケース、すなわち、＜合理的期待の場合＞が出てくることになる。

＜Case 4：合理的期待の場合＞

Case3 では、前期に今期の価格を、ホワイトノイズまで含めて期待を形成することの不合理を述べた。では、そのような期待形成にとってかわって、かつ、合理的な期待形成とはどのようなものが考えられるであろうか。自然な期待形成として考えられるのは、平均的に（＝期待値のレベルで）自己実現するような期待を形成している状態であろう。つまり、${}_{t-1}P_t^e = E_{t-1}P_t^*$ （$= E[P_t^* | \Omega_{t-1}]$）である。これを合理的期待と呼ぶ。この場合、期間 t における均衡価格 P_t^* は、

$$P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times E_{t-1}P_t^* + \frac{\varepsilon_t^d - \varepsilon_t^s}{\alpha_1}$$

となる。ここで、両辺の E_{t-1} をとると、

$$E_{t-1}P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \times E_{t-1}P_t^*$$

$$\therefore \quad E_{t-1}P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1}, \quad P_t^* = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1} + \frac{\varepsilon_t^d - \varepsilon_t^s}{\alpha_1}$$

である。これは、 確率項 $(\varepsilon_t^d, \varepsilon_t^s)$ のとる値によっては、期待 $E_{t-1}P_t^*$ とその実現値 P_t^* は一致しないが、平均的には両者が一致することを意味している。ちなみに、今期の均衡価格は、静学的期待の場合の定常解と一致している。

4　動学的マクロモデルにおける完全予見　～世代重複モデルの場合～

ここまでは部分均衡型の動学モデルを用いて完全予見概念の具体的説明を行ったが、次に一般均衡型の動学モデル、具体的には世代重複モデルを用いて同種の議論を行うことにしよう。

世代重複モデルとは基本的に以下のような特徴を有している。

- ・1 財モデルである。
- ・各家計は 2 期間、すなわち、「若年」（以後 y と表示）と「老年」（以後、o と表示）を生きる。
- ・期間 t に若年期を過ごす世代を「世代 t 」と呼ぶ。
- ・世代 t は L_t 個の同質的な家計から成る。

・各世代の家計数はnの率で成長する。すなわち、$L_{t+1}=(1+n)L_t$である。

以下では、まず最初にこのモデルにおける企業および家計の最適化問題を描写し、次にこのモデルの市場均衡を導出しよう。

＜企業の利潤最大化＞

まず、企業の最大化問題を考えるわけであるが、ここでも、簡単化のために、以下のような条件を付与する。

・生産部門には、代表的企業が一つ存在する。

・財市場、生産要素市場（＝労働市場と資本レンタル市場）ともに完全競争的である。

・生産関数$Y_t=F(K_t,L_t)$は「新古典派的[1]」である。　ここでK_t,L_tはｔ期の資本と労働をそれぞれ表す。

期間tにおける企業の利潤最大化は以下のように定式化される。

$$\max_{<K_t,L_t>}\ \pi_t=F(K_t,L_t)-(r_tK_t+w_tL_t)$$

企業は、利潤π_tを、K_t,L_tの調節をすることによって最大化するわけである[2]。従って、企業の生産要素需要を(K_t^d,L_t^d)と表記すると、それらは以下を満たす。

$$F_K(K_t^d,L_t^d)=r_t,\quad F_L(K_t^d,L_t^d)=w_t \qquad ①$$

この二つの式は、前者が、利子率r_tが与えられたときの資本需要関数を、後者が、賃金率w_tが与えられたときの労働需要関数をそれぞれ意味している。資本需要関数、労働需要関数に見られるように、世代重複モデルでは、企業の利潤最大化行動に「期待」は絡んでこないことに注意を要する。

＜世代tの家計の効用最大化＞

次に、家計の行動を考えてみよう。ここでも、まず、以下のような条件をあらかじめ設定しておく。

---

1 数学的には以下の条件を満たすという意味である。

①規模に関して収穫一定である。KとLをα倍すれば、Yはα倍される。

$\alpha F(K,L)=F(\alpha K,\alpha L)$

②限界生産性は逓減する。限界生産性は正であるが、要素投入が増加するにつれてその要素の限界生産性は逓減する。

$\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K}=F_K>0$、$\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L}=F_L>0$、$\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2}=F_{KK}<0$、$\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2}=F_{LL}<0$。

他に稲田条件を課す場合もあるが煩雑になるため、省略する。

2 最大化の条件は、$\dfrac{\partial\pi}{\partial K}=F_K(K,L)-r=0$、$\dfrac{\partial\pi}{\partial L}=F_L(K,L)-w=0$である。

・各家計は１単位の労働を所有し、それを非弾力的に供給する。
その上で、世代 t 家計の効用最大化問題は次式で定義される。

$$\max_{<c_t^y, c_{t+1}^o>} \quad U_t = u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o) \quad u'(\cdot) > 0,\ u''(\cdot) < 0,\ \beta > 0$$

$$\text{s.t.}\ \ c_t^y + s_t = w_t, \quad c_{t+1}^o = (1 +_t r_{t+1}^e) s_t$$

ここで、U_t は効用水準、c_t^y 、c_{t+1}^o は世代 t の若年期および老年期の消費であり、β は割引率である。家計は若年期に賃金所得 w_t を c_t^y と貯蓄 s_t に配分する。老年期には利子所得と貯蓄元本の取り崩しの合計を消費に回す。ここで、貯蓄 s_t に生じる実際の利子は $t+1$ 期の資本市場で成立する利子率(レンタル料)で与えられるが、家計が効用最大化問題を解く**期間 t においては、それを「期待」として扱う必要がある**ことに十分注意してほしい。すなわち家計は期待利子率に基づいて貯蓄の決定を行う。

効用最大化の１階の条件より[3]、最適な貯蓄 s_t^* は次式を満たしている。

$$u'(w_t - s_t^*) = (1 +_t r_{t+1}^e) \beta u'[(1 +_t r_{t+1}^e) s_t^*] \qquad \text{（オイラー方程式）}$$

この式の含意するところで重要な点は、最適な貯蓄が賃金率と期待利子率の関数になっているということである（$s_t^* = s(w_t, {}_t r_{t+1}^e)$）。ちなみに、効用関数を

$$U_t = \frac{(c_t^y)^{1-\theta}}{1-\theta} + \beta \frac{(c_{t+1}^o)^{1-\theta}}{1-\theta} \quad \theta > 0 \qquad ②$$

と特定化した場合、貯蓄関数は以下のとおりになる[4]。

$$s_t^* = [1 + \beta^{-1/\theta} (1 +_t r_{t+1}^e)^{(\theta-1)/\theta}]^{-1} w_t$$

＜世代 $t-1$ の t 期における行動＞

期間 t において世代 $t-1$ は老年期を迎えているため、資本からの収入を全て消費に充てることになる。よって、次式が成立している。

---

[3] この問題における、家計の効用最大化は賃金と期待利子率が家計から見て所与であることから、結局、$\max_{s_t} \quad U_t = u(w_t - s_t) + \beta u((1 +_t r_{t+1}^e) s_t)$ を解くことと同値である。U_t を s_t で微分して 0 とおけばオイラー方程式が得られる。ラグランジュ未定乗数法による解き方は付録 A を参照。

[4] 貯蓄関数の導出は付録 B を参照。

$$c_t^o L_{t-1} = (1+r_t)K_t$$

＜市場均衡＞

家計と企業の最適化問題を解いたので、いよいよ、市場均衡の問題に向かおう。ここで、市場均衡における市場とは、生産要素市場と財市場である。

・生産要素市場の均衡条件

（労働市場）$L_t = L_t^d$　（資本レンタル市場）$K_t = K_t^d$

これを①式に代入すると、$F_K(K_t, L_t) = r_t^*$,　$F_L(K_t, L_t) = w_t^*$　を得る。これは、先の資本需要関数と労働需要関数と形は全く同じであるが、ここでの利子率 r_t^* と賃金率 w_t^* は生産要素市場の均衡を表していることに注意されたい。行論のために、生産関数が新古典派的であることを利用して、表記を単純にする[5]。すると、均衡要素価格は

$$f'(k_t) = r_t^*, \quad f(k_t) - k_t f'(k_t) = w_t^* \qquad (k_t \equiv K_t / L_t)$$

となる。すなわち、新古典派生産関数の下では、均衡要素価格を k_t のみの関数として表せる。ちなみに、生産関数をコブ・ダグラス型、すなわち $F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ と特定化すると、以下が成立する。

$$f(k_t) = k_t^\alpha, \quad f'(k_t) = \alpha k_t^{\alpha-1}, \quad f(k_t) - k_t f'(k_t) = (1-\alpha)k_t^\alpha \qquad ③$$

・財市場の均衡条件

財市場は、今期の消費と来期の資本ストックとの和が今期の生産と今期の資本ストックとの和に等しいことから、次式が成立する。ただし、資本の減耗は捨象する。

$$c_t^o L_{t-1} + c_t^y L_t + K_{t+1} = F(K_t, L_t) + K_t$$

ここで、右辺の $F(K_t, L_t)$ は $w_t L_t + r_t K_t$ に等しく、$c_t^o L_{t-1} = (1+r_t)K_t$ を考慮して、$c_t^o L_{t-1} +$ $c_t^y L_t$ を左辺に移項すると、結局、

[5] 企業の利潤最大化条件については付録 C を参照。

$$K_{t+1} = w_t L_t - c_t^y L_t$$

を得る。この右辺は貯蓄、$s_t^* L_t$ に他ならない。よって、

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{s_t^* L_t}{L_{t+1}} = \frac{s_t^* L_t}{(1+n)L_t} = \frac{s_t^*}{(1+n)}$$

すなわち、

$$k_{t+1} = (1+n)^{-1} s_t^*$$

を得る。これは資本蓄積の時間経路を表している。s_t^* が賃金率と期待利子率 ${}_t r_{t+1}^e$ との関数であることから、

$$k_{t+1} = \frac{s^*[w_t^*, {}_t r_{t+1}^e]}{1+n}$$

と書くことができる。すなわち、**この経済の資本蓄積は期待形成のあり方に依存する**。また、k_t の経路が定まれば、この経済の全変数の時間経路も定まる。さらに、効用関数を②式のように特定化し、生産関数をコブ・ダグラス型と仮定すれば、資本蓄積式は以下のとおりになる。

$$k_{t+1} = \frac{[1+\beta^{-1/\theta}(1+{}_t r_{t+1}^e)^{(\theta-1)/\theta}]^{-1}(1-\alpha)k_t^\alpha}{1+n}$$

以下では、期待利子率がどのように規定されるかに応じて、資本蓄積の経路が変化する様子を考察する。

＜Case 1：外生的期待の場合＞

期待利子率が外生的に規定される場合には、期待利子率は、${}_t r_{t+1}^e = \bar{r}$ （$\bar{r}$ は外生的な定数）と決定される。よって、

$$k_{t+1} = \frac{s[f(k_t) - k_t f'(k_t), \bar{r}]}{1+n} \quad \text{（生産関数が新古典派的）}$$

$$= \frac{[1+\beta^{-1/\theta}(1+\bar{r})^{(\theta-1)/\theta}]^{-1}(1-\alpha)}{1+n} k_t^\alpha \quad \text{（生産関数、効用関数が上記のように特定化）}$$

となる。この資本の動学を図示すると、資本蓄積経路は大域的に安定的で、定常状態はただ一つ存在することがわかる。

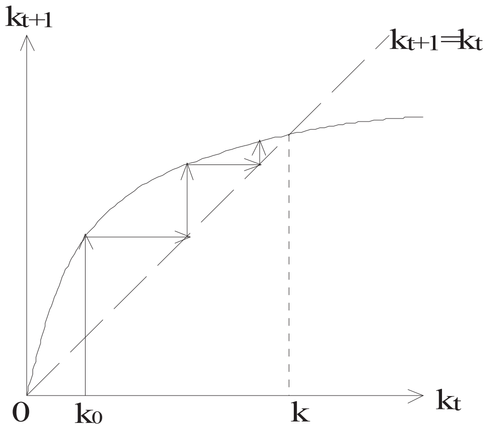

図 2：外生的期待の場合の資本動学

α は 1 より小さいので 45 度線とは傾きが 1 より小さい状態で交わる。また、45 度線との交点は 1 つだけなので定常状態は安定的で一意に存在することが分かる。定常状態における資本労働比率 k は次のように示される。

$$k=\left[\frac{1-\alpha}{1+n}\left(1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1+\bar{r}^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

従って、このときの利子率は次のように示される。

$$r=\alpha k^{\alpha-1}=\alpha\frac{1+n}{1-\alpha}\left(1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1+\bar{r}^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)\right)$$

よって、一般的には $r=\bar{r}$ は成立しない。

＜Case 2：静学的期待の場合＞

期間 t の均衡利子率 r_t^* が期間 $t+1$ も続くと仮定すると、どのようになるだろうか。この時、

$${}_t r_{t+1}^e = r_t^*$$

であるから、

$$k_{t+1}=\frac{s[f(k_t)-k_t f'(k_t), f'(k_t)]}{1+n}\quad(\text{生産関数が新古典派的})$$

$$=\frac{[1+\beta^{-1/\theta}(1+\alpha k_t^{\alpha-1})^{(\theta-1)/\theta}]^{-1}(1-\alpha)k_t^{\alpha}}{1+n}$$

(生産関数、効用関数を②、③のように特定化)

$$= G(k_t)$$

となる。資本の動学方程式に $k = k_{t+1} = k_t$ を代入すると、定常状態の資本労働比率 k は次の式を満たすように決まる。

$$k^{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{1+n} \frac{1}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}} \left(1+\alpha k^{\alpha-1}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}}$$

もし $\theta < 1$ であれば、左辺は単調増加、右辺は単調減少で、$k = 0$ の時、左辺の方が大きいことから、上式を満たす k が必ず 1 つ存在する。もし $\theta > 1$ であれば、右辺も単調増加になり、定常状態が存在しない、または複数の定常状態が存在する可能性がある。定常状態が局所安定的であるための条件は $-1 < \frac{dk_{t+1}}{dk_t} < 1$ である。$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$ は次の通りである。

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \alpha \left[1 + \frac{\beta^{-\frac{1}{\theta}} (1-\theta)(1+n)\left(1+\alpha k^{\alpha-1}\right)^{-\frac{1}{\theta}}}{\theta} \right]$$

局所安定性条件を満たしていれば、資本労働比率は時間を通じて、定常状態の資本労働比率に収束する[6]。また、定常状態においてのみ、期待利子率はその実現値と一致する。[7]

＜Case 3：完全予見の場合＞

この場合、期間 t において、期間 $t+1$ の均衡利子率 r_{t+1}^* を知っていると仮定することになる。

$${}_t r_{t+1}^e = r_{t+1}^*$$

であるから、

$$k_{t+1} = \frac{s[f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})]}{1+n} \quad \text{（生産関数が新古典派的）}$$

$$= \frac{[1+\beta^{-1/\theta}(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{(\theta-1)/\theta}]^{-1}(1-\alpha)k_t^\alpha}{1+n}$$

（生産関数、効用関数②、③のように特定化）

$$= H(k_t, k_{t+1})$$

である。陰関数定理を使えば、結局、$k_{t+1} = h(k_t)$ の形に落ち着く。この場合も、資本蓄積経路は複雑になるが、定常状態の資本労働比率 k は Case2 で示した通りに与えられる。た

6 無論、k_0 が局所安定条件を満たしていない領域にあると、資本労働比率は定常状態に収束しない。

7 θ =1 すなわち、対数効用関数の場合、期待形成が静学的期待であろうと合理的期待であろうと、利子率に関係なく所得の一定割合を貯蓄に回すので資本の動学には何ら影響を与えない。これについては付録 D を参照。

だ、Case2 と異なるのは、$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$ である。

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\frac{\alpha\theta}{\theta-\alpha\beta^{-\frac{1}{\theta}}(1-\theta)(1+n)\left(1+\alpha k^{\alpha-1}\right)^{-\frac{1}{\theta}}}$$

定常状態において、期待利子率は常にその実現値に等しくなり、自己実現することになる。

<Case 4：合理的期待の場合>

我々の、世代重複モデルでは明示的に、ノイズ（確率変数）が導入されていないので、合理的期待を考えることはできない。

<まとめ>

Case2 と Case3 で示唆されるように、同じ理論的枠組みの下でも期待形成のあり方が異なれば資本蓄積の動学方程式やその方程式の局所安定条件が異なり、たとえその定常解が同じであっても、期待形成のあり方如何によって経済動学は大きく異なりうることが分かる。

また、これまで取り扱ったモデルでは資本労働比率の経路に期待利子率が関与していたため、「期待」が重要な役割を担うことになったが、脚注 7 で指摘したように効用関数の特定化によっては資本労働比率の経路に期待利子率が関与せず、従って、資本労働比率が「期待」になんらの影響を受けない場合も考えることができる。併せて、ご注意願いたい。

5　おわりに

以上の考察を元にすれば、完全予見モデルとは以下のように定義してもよかろう。すなわち、

① 各経済主体の主体均衡問題の段階では期待を与件として問題を解き、

② (動学的)一般均衡の状態を求める段階で、初めて、

期待＝その実現値　（例：${}_t r^e_{t+1}=r^*_{t+1}$）

という仮定をおいた上で、動学均衡経路を導出する

という手続きを伴うモデルであると。従って、その当然の帰結として、当初の期待は常に自己実現していることになる。

さて、我々は勉便会を通じて、それぞれの専門家が専門外の研究者に対して、教えあうということを実践しつつある。これは、学部教員を研究者集団と見たときに、その研究水準を高め、その研究領域を拡大していくのに極めて有効な方法だと考えている。本稿はそのような勉便会の活動の一環として執筆されたものである。本稿を一読することによって、DSGE モデルを学習しつつある初学者にとって、「完全予見」概念が、より明確なものとな

ることを期待しつつ、筆を置くことにする。

参考文献(リーディングリスト)

大学院レベルの動学的最適化を学ぶためのマクロ経済学のテキスト

[1] Barro R.J. and Sala-i-Martin X. (2004) 'Economic Growth Second Edition,' MIT Press.

[2] Blanchard O.J. and Fischer S. (1989) 'Lectures on Macroeconomics,' MIT Press.

[3] Romer D. (2005) 'Advanced Macroeconomics Third Edition,' McGraw-Hill/Irwin.

[4] Turnovsky S.J.(2000) "Methods of Macroeconomic Dynamics Second Edition," MIT Press.

基本的なマクロ経済動学を学ぶテキスト

[5] 西村和雄 矢野誠 (2007) 「マクロ経済動学」岩波書店.

DSGE を学ぶマクロ経済学のテキスト

[6] 加藤涼 (2007)「現代マクロ経済学講義」東洋経済新報社.

大学院レベルのミクロ経済学のテキスト

[7] Varian H.R. (1992) 'Microeconomic Analysis,' W W Norton & Co Inc.

[8] 西村和雄 (1990) 「ミクロ経済学」東洋経済新報社.

学部レベルの経済理論のテキスト

[9] 浅子和美 倉澤資成 加納悟 (2009)「マクロ経済学　第 2 版」新世社.

[10] 西村和雄 (1995)「ミクロ経済学入門　第 2 版」岩波書店.

付録 A　ラグランジュ未定乗数法

予算制約式 $c_t^y + s_t = w_t$ を s_t について解き、$c_{t+1}^o = (1+{}_t r_{t+1}^e)s_t$ に代入すると次の式が得られる。

$$c_t^y + \frac{c_{t+1}^o}{1+{}_t r_{t+1}^e} = w_t$$

この時、ラグランジュ関数は次のように表すことができる。

$$L = u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o) + \lambda\left(w_t - c_t^y - \frac{c_{t+1}^o}{1+{}_t r_{t+1}^e} \right)$$

ただし λ はラグランジュ乗数である。最適解の必要条件は次のように表すことができる。

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^y} = u'\left(c_t^y\right) - \lambda = 0, \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}^o} = \beta u'\left(c_{t+1}^o\right) - \frac{\lambda}{1 + {}_t r_{t+1}^e} = 0, \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_t - c_t^y - \frac{c_{t+1}^o}{1 + {}_t r_{t+1}^e} = 0, \tag{A.3}$$

(A.1)と(A.2)より

$u'\left(c_t^y\right) = \beta\left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)u'\left(c_{t+1}^o\right)$を得ることができる。

付録 B　貯蓄関数の導出

$$u'\left(c_t^y\right) = \left(c_t^y\right)^{-\theta}$$

なので

$$u'\left(w_t - s_t^*\right) = \left(w_t - s_t^*\right)^{-\theta} \text{及び} u'\left(\left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)s_t^*\right) = \left(\left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)s_t^*\right)^{-\theta}$$

を考慮すると次の式が得られる。

$$\left(w_t - s_t^*\right)^{-\theta} = \left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)\beta\left(\left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)s_t^*\right)^{-\theta}$$

従って、次のように貯蓄関数を示すことができる。

$$\left(\frac{w_t - s_t^*}{\left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)s_t^*}\right)^{-\theta} = \left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)\beta$$

$$\frac{w_t - s_t^*}{\left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)s_t^*} = \left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)^{-\frac{1}{\theta}} \beta^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$w_t = \left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \beta^{-\frac{1}{\theta}} s_t^* + s_t^*$$

$$w_t = s_t^*\left(1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)$$

$$s_t^* = w_t\left(1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1 + {}_t r_{t+1}^e\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right)^{-1}$$

付録 C　企業の利潤最大化条件

まず、生産関数を$Y_t = F(K_t, L_t)$の両辺をL_tで割って整理すると、

$$\frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, \frac{L_t}{L_t}\right) = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right)$$

であるから

$$y_t = f(k_t) \qquad \left[y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t},\ f(k_t) \equiv F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right),\ k_t = \frac{K_t}{L_t} \right]$$

となる。さらに、$F(K_t, L_t) = L_t F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right)$ であるから、この両辺を L_t で偏微分すると、

$$F_L(K_t, L_t) = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) + L_t \frac{\partial F(k_t, 1)}{\partial k_t} \frac{\partial k_t}{\partial L_t} = f(k_t) + L_t f'(k_t)\left(-\frac{K_t}{L_t^2}\right) = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

を得る。同様に、両辺を K_t で偏微分すると

$$F_K(K_t, L_t) = L_t \frac{\partial F(k_t, 1)}{\partial k_t} \frac{\partial k_t}{\partial K_t} = L_t f'(k_t) \frac{1}{L_t} = f'(k_t)$$

を得る。

付録 D　対数効用関数の場合の資本の動学方程式

$\theta = 1$ の時、効用関数は次のような対数効用関数として与えられる。

$$U_t = \ln c_t^y + \beta \ln c_{t+1}^o$$

この時、貯蓄は次のように利子率とは独立に決まることが分かる。

$$s_t^* = \frac{\beta}{1+\beta} w_t$$

資本の動学方程式は次のように示される。

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)} k_t^\alpha$$

資本の動学は期待利子率とは関係なく決まる。利子率に対する期待形成は資本の動学にどのような影響を与えるかを考える上では重要な要素であったが、対数効用関数の場合は、利子率とは関係なく資本の動学が決まるので、期待形成が資本の動学に影響を与えない。

英文タイトル： What is Perfect Foresight?: Pedagogical Analyses with Simple Models

名前: Jumpei Tanaka, Masaya Yasuoka, Minoru Hayashida